



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARIA ACADÉMICA
DIRECCIÓN DE EDUCACION MEDIA SUPERIOR
CENTRO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS No. 13
"RICARDO FLORES MAGÓN"



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARIA ACADÉMICA
DIRECCIÓN DE EDUCACION MEDIA SUPERIOR
CENTRO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS No. 13
"RICARDO FLORES MAGÓN"

GUÍA

**de estudio para
presentar ETS de la
UNIDAD DE APRENDIZAJE
CÁLCULO INTEGRAL
CICLO ESCOLAR: 26-2
TURNO: MATUTINO**



Presidente de academia: **JUAN GABRIEL SALGADO CALLEJAS** Fecha de Elaboración: 20/03/26

Área: BÁSICA	Nombre de la Unidad de Aprendizaje: CÁLCULO INTEGRAL	Nivel/semestre: CUARTO
-------------------------------	---	---

Instrucciones generales de la guía:

Prepara tu examen a ETS iniciando con una revisión de los apuntes que tienes de tu curso ordinario o utilizando las ligas de los videos propuestos, en las cuales podrán encontrar el contenido completo de la unidad de aprendizaje.

Una vez que revisaste la información continúa resolviendo cada uno de los ejercicios propuestos en la presente guía, dándote la oportunidad de hacer tu proceso de autoevaluación. Una vez que terminaste de resolver los ejercicios propuesto date la oportunidad de resolver ejercicios de los que se encuentran contenidos en la bibliografía propuesta. De esta manera con seguridad quedaras preparado para tu evaluación.

Presentación:

La guía tiene como fin proporcionar los recursos y ejercicios que te ayudaran a realizar una buena preparación para tu evaluación, en la guía podrán encontrar una serie de ligas que te llevaran a los videos correspondientes que te facilitaran el estudio de cada uno de los temas a considerar en la evaluación. Además, encontraras una serie de ejercicios tipo, que te permitirán poner en practica cada uno de los temas de estudio. Y por último se te proporciona la bibliografía que te ayudara a continuar tu estudio a través de ejercicios y el desarrollo de los temas.

Objetivos:

El objetivo general de la presente guía consiste en proporcionarte los recursos y ejercicios que te permitirán reforzar el aprendizaje adquirido a lo largo del semestre en la unidad de aprendizaje de Cálculo Integral, guiándote a través de videos, bibliografía y ejercicios para que tengas una excelente preparación para tu ETS.



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARIA ACADÉMICA
DIRECCIÓN DE EDUCACION MEDIA SUPERIOR
CENTRO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS No. 13
“RICARDO FLORES MAGÓN”



Justificación:

En la unidad de aprendizaje de **cálculo integral** puede variar por semestre y generación sus índices de reprobación incrementándose este índice en algunas generaciones por lo que se realiza la presente guía con la firme intención de proporcionar al estudiante los temas centrales que se encuentran contenidos en la evaluación a título de insuficiencia, en la presente guía se plantea un enfoque metodológico que se fundamenta en el aprendizaje autónomo, a través de la planeación y organización de ejercicios pertinentes que conduzcan al logro de aprendizajes significativos para que el alumno desarrolle y aplique los conocimientos adquiridos en la unidad de aprendizaje, alcanzado como meta final la acreditación de la unidad de aprendizaje de **cálculo integral**.



Estructura y contenidos

Unidad I. INTEGRAL INDEFINIDA

- Rap 1. Obtiene la antiderivada de funciones con una variable real, en su entorno académico.
- Rap 2. Resuelve integrales inmediatas mediante el uso del formulario, en su entorno académico.
- Rap 3. Resuelve integrales reducibles a inmediatas, a través de transformaciones algebraicas, en su entorno académico.

Unidad II. METODOS DE INTEGRACIÓN.

- Rap 1. Resuelve integrales por el método de integración por partes, en su entorno académico.
- Rap 2. Resuelve integrales por el método de sustitución trigonométrica, en su entorno académico.
- Rap 3. Resuelve integrales por el método de funciones parciales, en su entorno académico.

Unidad 3. DEFINIDA.

- Rap 1. Establece el teorema fundamental del cálculo con base en los problemas que dieron origen al cálculo integral, en su entorno académico.
- Rap 2. Resuelve problemas geométricos a través del teorema fundamental del cálculo, en su entorno académico.
- Rap 3. Resuelve problemas que involucren a la integral definida, en su entorno social y global.

Evaluación:

La guía resuelta NO TIENE VALOR sobre la calificación del Examen, solo es un material didáctico que tiene como objetivo orientar al alumno en su preparación por lo que NO TIENE QUE SER ENTREGADA.



Materiales para la elaboración de la guía

- Apuntes que tomaste durante el semestre.
- Bibliografía recomendada.
- Ligas de videos de cada tema.
- Ejercicios y problemas proporcionados.

Para estudiar considera lo siguiente:

- Ambiente adecuado.
- Horario fijo.
- Reescribe el enunciado para que te vayas familiarizando con el formato del examen.
- Resuelve la guía con lápiz.

Actividades de estudio

Inicia estudiando con tus apuntes, a la par de los videos que te proporcionamos a continuación, donde podrás estudiar con claridad cada uno de los temas contenidos en el examen a ETS, una vez lo anterior procede resolver los ejercicios y problemas que te proporcionamos en la presente guía.

Unidad I. INTEGRAL INDEFINIDA

Integral de la diferencial de x.

<https://youtu.be/D10X9U08xzk?si=SzXIEqdVKENPoqe2>

https://youtu.be/ADrFlvwMi_0?si=3oWQDRD_-L19YWxk

Integral de una Variable elevada a una Potencia.

<https://youtu.be/cE4IrrAZIY?si=P51CiSuzqnf0o3y>

https://youtu.be/ez5fDeRWJzk?si=cDc2_pmeKFBpt9QF

Integral de una Contente por Variable elevada a una Potencia.

<https://youtu.be/KsfnmTQPHbg?si=9t6V-w8uP2e1FXXT>

https://youtu.be/j809pCO-vbA?si=iYu_Lhy_SfmZt-Tn

Integral de varios términos (polinomio).

https://youtu.be/sGV_T_AC3x8?si=H-MwMhdgGKRYISOa

https://youtu.be/9kNJARSP4wU?si=OfHXPBCywA1u1C_b



Integrales con productos que resultan en un polinomio.

<https://youtu.be/H2WR5fKJh38?si=h9-PWdBgnDLUhno>

https://youtu.be/m4LC925P2l0?si=2NchHLos_L4FsRD8

Integral con Divisiones de Polinomios o factorización.

<https://youtu.be/Omwy3WCUuBU?si=vuV8tCzT1PO4fb8y>

<https://youtu.be/yG9HoMobnms?si=2SjDKHk5sGBaAsZL>

<https://youtu.be/Ysl7MmKlpZU?si=5d6AquOYY1sFS7dl>

Integrales Algebraicas por Cambio de variable.

<https://youtu.be/B10NLHFIMVw?si=Dn3xNlZskok63e3P>

https://youtu.be/Dxlcitpzz58?si=li-GuYnjW-R7_Ciz

https://youtu.be/ZlbFfKh_3uY?si=7uPvYYFCmFEbq1H7

https://youtu.be/Fcmn_EL4zF8?si=uPoXr2Vxirc04pnQ

<https://youtu.be/-8XK-QcThC4?si=cQneS0fXssyqNsZ1>

<https://youtu.be/D0ifg1WcdGo?si=uQIKtSBwRRpuQ7QG>

<https://youtu.be/xGb2zxENsnU?si=pEV9jfCYf0p314pw>

Integrales de Funciones Trigonómicas.

<https://youtu.be/1gn3iii7muo?si=d3xEZffLeZc40LxW>

<https://youtu.be/HyEK900a0ds?si=QTOJk7aBBPVT07Fp>

<https://youtu.be/VOTlzBNvEB0?si=pVGppLekRFLlQcGL>

https://youtu.be/fYEduE0pzTU?si=JwxmhI3FAE_JlzxY

<https://youtu.be/lzaQzCFRgnE?si=j--xqHd6xldJVkjr>

<https://youtu.be/P2b7l8LOHnc?si=1jcMIjBd45-3Gryj>

<https://youtu.be/AiDCKc7d4eg?si=gxrqal1SZw3jRMXp>

<https://youtu.be/FB8nLmVMRRM?si=2XcAik9JC8tZZw-f>

<https://youtu.be/4fqG2DoFJoE?si=OkTg-C797PORfLHW>

<https://youtu.be/HDB7vCW8hGM?si=ie6hGjm7AOtAtB2g>

<https://youtu.be/JLntOY0fKPI?si=HqDdJ7QIVRjcz9Mo>

<https://youtu.be/SU4WQfLooCM?si=mRB2Ji4l5MZH4wP5>

Integrales de Potencias Trigonómicas: Impar Seno.

https://youtu.be/iNzHzcAz_PI?si=08-FGih1Bi_FwpGh

<https://youtu.be/GMbN2uUc2Wk?si=92NtuiuQLhFrRnMY>



Integrales de Potencias Trigonométricas: Impar Coseno.

<https://youtu.be/36LCY75fCfY?si=nipY54o90Qtv1Kf9>
https://youtu.be/zly_Tym1Kbw?si=9QX1QDN1F7Hdbejh

Integrales de Potencias Trigonométricas: Par Seno.

<https://youtu.be/AqLgHeBBns?si=K7nqUHreFtxIKNBe>
https://youtu.be/T7pt2AB4ZVw?si=c_VLj29GyzeW0X1D

Integrales de Potencias Trigonométricas: Par Coseno.

https://youtu.be/ZAthF_81tIE?si=FnMhyuePpYq7ppUT
https://youtu.be/31XC77d-Eb0?si=Dz3xqyf6FdIPYI_b

Integrales de Potencias Trigonométricas: Par Tangente.

<https://youtu.be/N4Tk92S76lo?si=sXlpSb2vBYpKQXpZ>
https://youtu.be/yXMHNj1iM9Q?si=5w-TKuHBm8tH7_wV

Integrales de Potencias Trigonométricas: Par Cotangente.

<https://youtu.be/uMVLNP5Xsg8?si=Rjhd3ToM6fSlxkH8>
https://youtu.be/pwQZucpl_Ow?si=G5-mSsk_UncTmUF2

Integrales de Potencias Trigonométricas: Impar Tangente.

https://youtu.be/k5blwHJZgP8?si=MG1Gr5e3EUcP_RzX
<https://youtu.be/8EdPGk0YlgA?si=13uxZzy1sCz3nYgn>

Integrales de Potencias Trigonométricas: Impar Cotangente.

https://youtu.be/Ltb0ds467_0?si=Y54BICWaPUTVYYMP
<https://youtu.be/8TTAilmbwbl?si=oVp68SLwb0kwFNlk>



Integrales de Potencias Trigonométricas: Par Secante.

<https://youtu.be/NHUqW0VVAN4?si=Pyhvj7HXSWu52BbQ>

https://youtu.be/1g_UxNmIlgWs?si=jMxM9_9nSv0c3Me

Integrales de Potencias Trigonométricas: Par Cosecante.

<https://youtu.be/ih0SaUz4Xys?si=rR7jgTUBKiV-RE1U>

https://youtu.be/uKxTK2_m6N8?si=AMu6kr5UgyC9b2nR

Integrales de Potencias Trigonométricas: Par Seno e Impar Coseno.

https://youtu.be/Ch2HmWJOoVA?si=6WV2XRbDfp_a5jTG

<https://youtu.be/XPiXBM1I-PM?si=JXvvlI-xD7xJnWGs>

Integrales de Potencias Trigonométricas: Impar Seno e Par Coseno.

<https://youtu.be/lqCvhsYbxnk?si=U-33NHIJEzOBRt02>

<https://youtu.be/8z75ABwaohg?si=98BrC--dJzZtNUBR>

Integrales de Potencias Trigonométricas: Par Seno e Par Coseno.

https://youtu.be/rwE_XCJOJpc?si=ODi-BwMq1ttL4q0W

<https://youtu.be/ZJ5MJ5Ti1Rs?si=ZApNqrUDaodYvHvc>

Integrales de Potencias Trigonométricas: Impar Tangente e Par Secante.

<https://youtu.be/doGMJn1Zvdc?si=BVExU2dmiwaXkXcu>

Integrales de Potencias Trigonométricas: Par Tangente e Par Secante.

https://youtu.be/Z-TdvcRKBXA?si=JDs_qgqKJ8-Koqxd



Unidad II. METODOS DE INTEGRACIÓN.

Integral por Partes: Conceptos.

https://youtu.be/dEGAaFM7Vkw?si=ijjkeBcAXscnw_be

Integral por Partes: Función Algebraica y Logarítmica.

https://youtu.be/mqB7oiNVF68?si=i_iJIWS77O4Ihyv-
<https://youtu.be/oHIFBHmsjDY?si=Aut4pH1u-SdrNfsc>

Integral por Partes: Función Algebraica y Exponencial.

<https://youtu.be/KxwOC5w6crA?si=xEfHHwRq9gMWPAGB>
<https://youtu.be/ggSp7GuFV08?si=WQJbVvKhDbGYII6E>

Integral por Partes: Función Algebraica y Trigonométrica.

https://youtu.be/cOWWI57K3L4?si=T_ZBf4xNi5UtPDQZ
https://youtu.be/7GcRcMG70yM?si=5SvI54foWIIEL_SM

Integral por Partes: Funciones Cíclicas.

https://youtu.be/9G7xPdbLh_8?si=P7MRTJbHmkBdmWtZ
<https://youtu.be/dLy5AqFk3NI?si=YULuKWU30BRDp59G>
<https://youtu.be/e7ypUISy654?si=l8LiseAw09PRJrz5>

Integral por Fracciones Parciales Caso I.

https://youtu.be/y_aY079BvHY?si=N0DxCS9m45YUYDMp
https://youtu.be/Y_8xx3c89zQ?si=t4kiLt8TmLNsbyQJ
https://youtu.be/oMhx4_nHkwI?si=5QbLjX3zGYmA7wsy

Integral por Fracciones Parciales Caso II.

<https://youtu.be/dJ83BPgREnM?si=VSM3qXhpIIaASZTK>
<https://youtu.be/h7ebVKtaihk?si=Gv46M71GVVrz7p5X>
https://youtu.be/Ov_4sbe89as?si=wHgDK3WqJd3oNYEW
https://youtu.be/Ov_4sbe89as?si=wHgDK3WqJd3oNYEW



Integrales por Sustitución Trigonométrica Conceptos.

<https://youtu.be/-vJPzQtdyJU?si=rCcunyEDYl18Ex2o>

Integrales por Sustitución Trigonométrica Caso I.

<https://youtu.be/lbW069gCmbE?si=fNaXJ-DJSkuT1X26>
https://youtu.be/tWrlgZ1oeuw?si=jCvY7JF_LGCMvnD1
<https://youtu.be/vojn7m6yMEE?si=vP8u3GBw8VoV6ahD>

Integrales por Sustitución Trigonométrica Caso II.

<https://youtu.be/hNPJSxm1qnE?si=DxXF9PG4ylge-kuM>
<https://youtu.be/BZBAveg-BG8?si=ZN3SP19jto0UIS-e>
<https://youtu.be/T0WngxRgqQA?si=Dx4WF0adsZKjJrUX>

Integrales por Sustitución Trigonométrica Caso III.

<https://youtu.be/GINzFhFNubs?si=3qRs8w3j3zKGI8w>
<https://youtu.be/IEETzvDGVKE?si=xVnCngH6BJr5K0WT>
<https://youtu.be/bwhlh0IIsCY?si=FQZA9R3dUtVIs3QE>

Unidad 3. DEFINIDA.

Integral Definida Conceptos

<https://youtu.be/xBzwLOq2Pg0?si=zlS7Jon2Fbaj6Ju6>

Integral Definida de Funciones Algebraicas.

https://youtu.be/fBD5Eilk2-4?si=ZeeR0Sguph3_7tli
<https://youtu.be/GSCeMVIKcNM?si=V5bWZ4hd97zw70Vo>
<https://youtu.be/0UZtprD9wd4?si=GQQvJkbOauPvFBxu>
<https://youtu.be/xHlsq81ygvQ?si=EICHVuuqr0GYKsvZ>
https://youtu.be/3VlforM_yDM?si=d6FfiqHnXDfeCw4A



Integral Definida de Funciones Trascendentes.

<https://youtu.be/yJcN5D9c22M?si=JXrs0LDR6afYTtPR>
<https://youtu.be/FeGEFPZS7Uc?si=NtN0kNZRV6qhKdND>
https://youtu.be/IECSD_7SM-g?si=qkskiApJUHxKVjCd
https://youtu.be/zlkdul_xnY8?si=5V9KStWVoB5hNF8w
https://youtu.be/jwj-fovgsdk?si=Avh_mcy58-Gk7lqb

Área Bajo la Curva Conceptos.

https://youtu.be/PQRGLVne1E4?si=n_ZcBiFkw7pmrHgk

Área Bajo la Curva Ejercicios.

<https://youtu.be/t8ZUwUI3Lx0?si=poMJu4JDFyNFombP>
<https://youtu.be/nVAUmUsum74?si=XJcvUENVEPO8ngx9>
https://youtu.be/_O_nr2MtV2U?si=G4yLuDTg3qd4zP9R

Área entre Curvas Conceptos.

<https://youtu.be/DENNPMbeO2c?si=DOlaGZgyxEX0hrK8>

Área entre Curvas Ejercicios.

https://youtu.be/z2ENo_qmluU?si=ey4odMc7F7P894NP

Aplicación de la Integral.

<https://youtu.be/vxC2pU8XHf0?si=zeTr5nUrRB5zmiU5>
<https://youtu.be/DvNpyGZZB-8?si=ugoS3bUMG0RZ5j2Z>
https://youtu.be/MFuO1SDBiKI?si=j2VIAS1jEJicQ_W
<https://youtu.be/NyJe2Sf-7fc?si=gDkIf7yBhioYwNbl>



Bibliografía básica

Título: Cálculo Integral.

Autor: Samuel Fuenlabrada de la Vega

Editorial: McGraw-Hill, México

Título: Cálculo Integral.

Autor: Cuellar, J.A.

Editorial: McGraw-Hill, México.

Título: Cálculo Diferencial e Integral.

Autor: Granville.

Editorial: Limusa Noriega Editores.

Título: Cálculo Diferencial e Integral.

Autor: Pruerzell Varberg.

Editorial: Pearson Educación.

Sexta Edición.

Título: Cálculo Diferencial e Integral.

Autor: Bosch Guerra y Hernández Oteiza.

Editorial: Patria Cultural.

Título: Cálculo Diferencial e Integral.

Autor: Prentice Hall y Conamat.

Editorial: Pearson.

Título: Cálculo Diferencial e Integral.

Autor: Krantz.

Editorial: McGraw Hill Serie Schaum.

Título: Cálculo Diferencial e Integral.

Autor: Emiliano Mora Valladares y María del Río Francos.

Editorial: Santillana.



Integrantes de la academia.

Concepción Lozada Navarro.

Juan Gabriel Salgado Callejas.

María del Carmen Sevilla Alatorre.

Antonio Rodríguez Castillo.

Índice de contenidos

Temario.

Unidad I. Integral Definida.

- Diferenciales y anti diferenciales.
- Integrales algebraicas inmediatas.
- Constante de integración.
- Integrales algebraicas reducibles.
- Integrales exponenciales reducibles.
- Integrales logarítmicas reducibles
- Integrales de funciones trigonométricas.
- Integrales de potencia trigonométricas.
- Integrales de productos de senos y cosenos de ángulos múltiplos.

UNIDAD II. Métodos de Integración.

- Método por cambio de variable.
- Método de integración por partes.
- Método de sustitución trigonométrica.
- Método de fracciones parciales.

UNIDAD III. Integral Definida.

- Teorema fundamental del cálculo.
- Integral definida.
- Área bajo la curva.



- Área entre curvas.
- Problemas de aplicación de cálculo integral.

Contenido.

Unidad I. Integral Definida.

I.- Obtener las siguientes integrales inmediatas algebraicas y simplificar el resultado.

- | | |
|--|---|
| 1.- $\int dx$ | Sol. $x+c$ |
| 2.- $\int 3dx$ | Sol. $3x+c$ |
| 3.- $\int \frac{dx}{x}$ | Sol. $\ln x +c$ |
| 4.- $\int \sqrt[4]{x^3} dx$ | Sol. $\frac{4}{7}x^4 + c$ |
| 5.- $\int 5x^3 dx$ | Sol. $\frac{5}{4}x^4 + c$ |
| 6.- $\int 2bx^3 dx$ | Sol. $\frac{b}{2}x^4 + c$ |
| 7.- $\int \frac{3}{4}\sqrt{x} dx$ | Sol. $\frac{1}{2}x\sqrt{x} + c$ |
| 8.- $\int \frac{dx}{x^3}$ | Sol. $-\frac{1}{2x^2} + c$ |
| 9.- $\int \frac{dx}{x^{-2}}$ | Sol. $\frac{1}{3}x^3 + c$ |
| 10.- $\int \left(x^4 - x^2 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right) dx$ | Sol. $\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + c$ |
| 11.- $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x^3}} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx$ | Sol. $-\frac{4}{\sqrt{x}} - 5\sqrt[3]{x} + c$ |
| 12.- $\int 5\sqrt{5x} dx$ | Sol. $\frac{2}{3}\sqrt{(5x)^3} + c$ |
| 13.- $\int \frac{(x-3)dx}{x+3}$ | Sol. $(x-6) \ln x+3 +c$ |
| 14.- $\int \frac{x+2}{x+1} dx$ | Sol. $x+\ln x+1 +c$ |



$$15.- \int \frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{Sol. } \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - 2\sqrt{x^3} + 10\sqrt{x} + c$$

$$16.- \int \frac{x^3 dx}{x-1}$$

$$\text{Sol. } \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + c$$

$$17.- \int (x+2)(x-1) dx$$

$$\text{Sol. } \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + c$$

$$18.- \int \frac{(4-x)^2}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{Sol. } 32\sqrt{x} - \frac{16}{3}x\sqrt{x} + \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + c$$

II.- Resuelve las siguientes integrales por cambio de variable.

$$1.- \int (x^2 - 6)^4 x dx$$

$$\text{Sol. } \frac{1}{10}(x^2 - 6)^5 + c$$

$$2.- \int \frac{2x dx}{\sqrt{4+3x^2}}$$

$$\text{Sol. } \frac{2}{3}\sqrt{4+3x^2} + c$$

$$3.- \int \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)} (x^2 + 2x) dx$$

$$\text{Sol. } \frac{2}{9}\sqrt{(x^3 + 3x^2)^3} + c$$

$$4.- \int (2x - 5x^2) (2 - 10x) dx$$

$$\text{Sol. } \frac{1}{2}(2x - 5x^2)^2 + c$$

$$5.- \int 5\sqrt{5x} dx$$

$$\text{Sol. } \frac{2}{3}\sqrt{(15x)^3} + c$$

$$6.- \int (4x^3 - 2x) (x^4 - x^2 - 5)^3 dx$$

$$\text{Sol. } \frac{(x^4 - x^2 - 5)^4}{4} + c$$

$$7.- \int \frac{4x^3 dx}{1+x^4}$$

$$\text{Sol. } \ln |1+x^4| + c$$

$$8.- \int \frac{2 dx}{1+2x}$$

$$\text{Sol. } \ln |1+2x| + c$$

$$9.- \int 3x^2 (x^3 - 1)^3 dx$$

$$\text{Sol. } \frac{1}{4}(x^3 - 1)^4 + c$$

$$10.- \int x\sqrt{x^2 + 4} dx$$

$$\text{Sol. } \frac{1}{9}(3x + 4)^3 + c$$

$$11.- \int \frac{x^2 dx}{x^3 - 2}$$

$$\text{Sol. } -\frac{1}{3}\ln |x^3 - 2| + c$$

$$12.- \int \frac{5x dx}{\sqrt{2x^2 + 3}}$$

$$\text{Sol. } \frac{5}{2}\sqrt{2x^2 + 3} + c$$

$$13.- \int \frac{6x^2 dx}{x^3 - 1}$$

$$\text{Sol. } 2 \ln |x^3 - 1| + c$$



14.- $\int x\sqrt{(5-x^2)} dx$

Sol. $-\frac{1}{3}\sqrt{(3-4x^3)} + c$

15.- $\int \frac{3x^2}{\sqrt{3-4x^3}} dx$

Sol. $-\frac{1}{2}\sqrt{3-4x^3} + c$

16.- $\int \frac{(x+2)}{x^2+4x} dx$

Sol. $\frac{1}{2}\ln|x^2+4x| + c$

17.- $\int (x^3+1)^{1/2} x^2 dx$

Sol. $\frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2} + c$

18.- $\int \frac{5x^3}{(x^4-1)^3} dx$

Sol. $-\frac{5}{8(x^4-1)^2} + c$

19.- $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3-1}} dx$

Sol. $\frac{4}{9}(x^3+1)^{3/4} + c$

20.- $\int 2x\sqrt{x^3-1} dx$

Sol. $-\frac{1}{3}\sqrt{(3-2x^2)^3} + c$

III.- Resuelve las siguientes integrales de funciones trigonométricas.

1.- $\int \sin^4 x \cos x dx$

Sol. $\frac{1}{5}\sin^5 x + c$

2.- $\int \frac{\sec^2 \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$

Sol. $\tan \sqrt{x} + c$

3.- $\int \cos^2 5x \sin 5x dx$

Sol. $-\frac{1}{15}\cos^3 5x + c$

4.- $\int 3x \sin x^2 dx$

Sol. $-\frac{3}{2}\cos x^2 + c$

5.- $\int 7 \tan^2 x dx$

Sol. $7 \tan x - 7x + c$

6.- $\int \cos 4x dx$

Sol. $\frac{1}{4}\sin 4x + c$

7.- $\int \sec^2 2x dx$

Sol. $\frac{1}{2}\tan 2x + c$

8.- $\int 3x^3 \sqrt{2x^2-8} dx$

Sol. $\frac{9}{16} \sqrt[3]{(2x^2-8)^4} + c$

9.- $\int \cos^4 3x \sin 3x dx$

Sol. $-\frac{1}{15}\cos^5 3x + c$

10.- $\int \sin^3 x \cos x dx$

Sol. $\frac{1}{4}\sin^4 x + c$

11.- $\int 5 \tan^2 x dx$

Sol. $5 \tan x - 5x + c$



12.- $\int \tan^2(3x - 1) dx$

Sol. $\frac{1}{3}\tan(3x - 1) - x + c$

13.- $\int (1 + y^3)^2 dy$

Sol. $y + \frac{y^4}{2} + \frac{y^7}{7} + c$

14.- $\int x^3 \cos x^4 dx$

Sol. $\frac{1}{4}\sin x^4 + c$

15.- $\int \sin^2 3x \cos 3x dx$

Sol. $\frac{1}{9}\sin^3 3x + c$

16.- $\int \tan^5 2x \sec^2 2x dx$

Sol. $\frac{1}{12}(\tan 2x)^6 + c$

17.- $\int \frac{5 dx}{\cos^2 x \sqrt{\tan x - 2}}$

Sol. $10 \sqrt{(\tan x - 2)} + c$

18.- $\int \tan^2 2y dy$

Sol. $\frac{1}{2}\tan 2y - y + c$

19.- $\int \tan^4 x dx$

Sol. $\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + c$

20.- $\int \sec^2 5x dx$

Sol. $\frac{1}{5}\tan 5x + c$

21.- $\int \csc^2(3 + 5x) dx$

Sol. $-\frac{1}{5}\cot(3 + 5x) + c$

22.- $\int \frac{2 dy}{\sin^2 5y}$

Sol. $-\frac{2}{5}\cot 5y + c$

23.- $\int \sin^3 2y \cos 2y dy$

Sol. $\frac{1}{8}(\sin 2y)^4 + c$

24.- $\int (\tan^2 3x - \sec^2 3x) dx$

Sol. $-x + c$

25.- $\int \csc \frac{3}{4}x \cot \frac{3}{4}x dx$

Sol. $-\frac{4}{3}\csc \frac{3}{4}x + c$

IV.- Resuelve las siguientes integrales de funciones exponenciales y logarítmicas.

1.- $\int e^{6x} dx$

Sol. $\frac{1}{6}e^{6x} + c$

2.- $\int e^{3x/5} dx$

Sol. $\frac{5}{3}e^{3x/5} + c$

3.- $\int \frac{\ln^2 y}{y} dy$

Sol. $\frac{1}{3}\ln^3 |y| + c$

4.- $\int \frac{dy}{5-9y}$

Sol. $-\frac{1}{9}\ln |5 - 9y| + c$



5.- $\int e^{\cot 2x} \csc^2 2x \, dx$

Sol. $-\frac{1}{2}e^{\cot 2x} + c$

6.- $\int y^3 e^{y^4} \, dy$

Sol. $\frac{1}{4}e^{y^4} + c$

7.- $\int (e^{x/2} - e^{-x/2}) \, dx$

Sol. $2(e^{x/2} + e^{-x/2}) + c$

8.- $\int (e^{2x} + 3)^2 \, dx$

Sol. $\frac{1}{4}e^{4x} - 3e^{2x} + 9x + c$

9.- $\int \frac{\ln(x-3) \, dx}{x-3}$

Sol. $\frac{1}{2} \ln^2 |x-3| + c$

10.- $\int 9e^{3x} \, dx$

Sol. $3e^{3x} + c$

11.- $\int \frac{e^{5x} + e^{-4x}}{e^{2x}} \, dx$

Sol. $\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{6}e^{-6x} + c$

12.- $\int \frac{dx}{e^x}$

Sol. $-\frac{1}{e^x} + c$

13.- $\int e^{\sin y} \cos y \, dy$

Sol. $e^{\sin y} + c$

14.- $\int 10^{2x} \, dx$

Sol. $\frac{10^{2x}}{2 \ln 10} + c$

15.- $\int 3^{5y} \, dx$

Sol. $\frac{3^{5y}}{5 \ln 3} + c$

16.- $\int \frac{e^{y^{1/2}} \, dy}{y^{1/2}}$

Sol. $2e^{y^{1/2}} + c$

17.- $\int 3^{2x} \, dx$

Sol. $\frac{3^{2x}}{2 \ln 3} + c$

18.- $\int (e^{3x} + 7^{3x}) \, dx$

Sol. $\frac{1}{3} \left[e^{3x} + \frac{7^{3x}}{\ln 7} \right] + c$

19.- $\int x 3^{x^2} \, dx$

Sol. $\frac{3^{x^2}}{2 \ln 3} + c$

20.- $\int \frac{\ln^2 3x}{x} \, dx$

Sol. $\frac{1}{3} \ln^3 |3x| + c$

V.- Resuelve las siguientes integrales que involucran potencias trigonométricas.

1.- $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

Sol. $\frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin 4x + c$

2.- $\int \cos^2 4x \, dx$

Sol. $\frac{x}{2} - \frac{1}{16} \sin 8x + c$



3.- $\int \sin^4 x \, dx$

Sol. $\frac{3x}{8} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c$

4.- $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$

Sol. $\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c$

5.- $\int \tan^3 x \sec^5 x \, dx$

Sol. $\frac{\sin^7 x}{7} - \frac{\sec^5 x}{5} + c$

6.- $\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx$

Sol. $\frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + c$

7.- $\int \cot^5 x \, dx$

Sol. $-\frac{\cot^4 x}{4} + \frac{\cot^2 x}{2} + \ln|\sin x| + c$

8.- $\int \cot^2 x \csc^4 x \, dx$

Sol. $-\frac{\cot^3 x}{3} - \frac{\cot^5 x}{5} + c$

9.- $\int \tan^4 x \, dx$

Sol. $\frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + c$

10.- $\int \sec^4 3x \, dx$

Sol. $\frac{1}{3} \tan 3x + \frac{1}{9} \tan^3 3x + c$

11.- $\int \csc^4 3x \, dx$

Sol. $-\frac{1}{3} \cot 3x - \frac{1}{9} \cot^2 3x + c$

12.- $\int \tan^4 x \sec^4 x \, dx$

Sol. $\frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^7 x}{7} + c$

UNIDAD II. Métodos de Integración.

VI.- Resuelve las siguientes integrales por el método de integración por partes.

1.- $\int x \sec^2 3x \, dx$

Sol. $\frac{x}{3} \tan 3x + \frac{1}{9} \ln|\sec 3x| + c$

2.- $\int x \sin \frac{x}{2} \, dx$

Sol. $-2 \cos \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{2} + c$

3.- $\int x e^{-x} \, dx$

Sol. $-e^{-x}(x-1) + c$

4.- $\int x^2 \sin x \, dx$

Sol. $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$

5.- $\int \cos \frac{x}{2} \, dx$

Sol. $2x \sin \frac{x}{2} + 4 \cos \frac{x}{2} + c$

6.- $\int x \csc^2 x \, dx$

Sol. $-x \cot x + \ln|\sin x| + c$



7.- $\int x \operatorname{sen} 5x \, dx$

Sol. $-\frac{1}{5}x \cos 5x + \frac{1}{25} \operatorname{sen} 5x + c$

8.- $\int x \ln 3x \, dx$

Sol. $\frac{1}{2}x^2 \ln |3x| - \frac{3}{4}x^2 + c$

9.- $\int x \cos x \, dx$

Sol. $x \operatorname{sen} x + \cos x + c$

10.- $\int x \operatorname{sen} x \, dx$

Sol. $\operatorname{sen} x - x \cos x + c$

11.- $\int x^2 \cos x \, dx$

Sol. $x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x + 2 \operatorname{sen} x + c$

12.- $\int x \cos 3x \, dx$

Sol. $\frac{x}{3} \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + c$

13.- $\int x \sec^2 x \, dx$

Sol. $x \tan x - \ln |\sec x| + c$

14.- $\int x \ln x \, dx$

Sol. $\frac{x^2}{2} \ln |x| - \frac{x^2}{x} + c$

15.- $\int x^2 e^x \, dx$

Sol. $e^x(x^2 - 2x + 2) + c$

VII.- Resuelve las siguientes integrales por el método de sustitución trigonométrica.

1.- $\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$

Sol. $\frac{1}{9} \left[\frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \right] + c$

2.- $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \, dx$

Sol. $-\frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{2} + c$

3.- $\int x \sqrt{x^2 + 4} \, dx$

Sol. $\frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 4)^3} + c$

4.- $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} \, dx$

Sol. $\frac{x\sqrt{x^2+9}}{2} - \frac{9}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+9}+x}{3} \right| + c$

5.- $\int x \sqrt{3+x^2} \, dx$

Sol. $\frac{1}{3} \sqrt{(3+x^2)^3} + c$

6.- $\int \frac{y}{\sqrt{y^2+16}} \, dy$

Sol. $\sqrt{y^2 + 16} + c$

7.- $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}$

Sol. $\frac{1}{2} \ln |2x + \sqrt{4x^2 - 1}| + c$

8.- $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}$

Sol. $\frac{x}{9\sqrt{x^2+9}} + c$

9.- $\int y(4-y^2)^{3/2} \, dy$

Sol. $-\frac{1}{5}(4-y^2)^{5/2} + c$



10.- $\int x(1+x^2)^{5/2} dx$

Sol. $\frac{1}{7}(1-x^2)^{7/2} + c$

VIII.- Resuelve las siguientes integrales por el método de fracciones parciales.

1.- $\int \frac{3x-2}{x^3-x^2-2x} dx$

Sol. $\ln|x| + \ln|x-2|^{2/3} - \ln(x+1)^{5/3} + c$

2.- $\int \frac{dx}{5x+x^2}$

Sol. $\frac{1}{5} \ln|x| - \frac{1}{5} \ln|x+5| + c$

3.- $\int \frac{2x-1}{x(x^2+3x+2)} dx$

Sol. $3 \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{5}{2} \ln|x+2| + c$

4.- $\int \frac{1}{(x+4)(x-3)} dx$

Sol. $\ln|x-4| - \ln|x-3| + c$

5.- $\int \frac{x+16}{x^2+2x-8} dx$

Sol. $3 \ln|x-2| - 2 \ln|x+4| + c$

6.- $\int \frac{4x^2+3x-1}{x^2(x-1)} dx$

Sol. $-2 \ln|x| - \frac{1}{x} + 6 \ln|x-1| + c$

7.- $\int \frac{x}{x^2+2x+1} dx$

Sol. $\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$

8.- $\int \frac{dx}{x^2+3x+2}$

Sol. $\ln|x+1| - \ln|x+2| + c$

9.- $\int \frac{7x+1}{(x+3)(x-1)} dx$

Sol. $5 \ln|x+3| + 2 \ln|x-1| + c$

10.- $\int \frac{5x^2-10x+8}{x(x-2)(x+2)} dx$

Sol. $-2 \ln|x| + \ln(x-2) + 6 \ln(x+2) + c$

UNIDAD III. Integral Definida.

IX.-Calcula el valor de las siguientes integrales definidas.

1.- $\int_0^2 x(x^2+1)^3 dx$

Sol. 78

2.- $\int_0^3 (6x+1)(3x^2+x)^2 dx$

Sol. 9000

3.- $\int_0^2 \frac{(x+1)dx}{2\sqrt{x^2+2x}}$

Sol. $\sqrt{2}$

4.- $\int_3^3 x dx$

Sol. 0



5.- $\int_4^1 x \, dx$ Sol. $-\frac{15}{2}$

6.- $\int_1^2 (x^3 + x) \, dx$ Sol. $\frac{21}{4}$

7.- $\int_1^e \frac{dx}{x}$ Sol. 1

8.- $\int_0^3 (x - 4) \, dx$ Sol. $-\frac{15}{2}$

9.- $\int_{-2}^0 \sqrt[3]{x^2} \, dx$ Sol. $\frac{6}{5} \sqrt[3]{4}$

10.- $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$ Sol. $\frac{1}{2}$

X.- Cálculo de área bajo la curva.

1.- Calcula el área limitada por la gráfica de $y = f(x) = -x^2 + 2x + 3$, el eje de las x y las líneas verticales $x=0$ y $x=2$. Traza además la gráfica. Sol. $\frac{22}{3} u^2$

2.- Calcula el área limitada por $f(x) = 4$, el eje x , y las líneas verticales $x=5$ y $x=2$. Traza además la gráfica. Sol. $12u^2$

3.- Determina el área de la región comprendida entre $y=x+3$, el eje de las x , y las líneas verticales $x=0$, $x=4$. Traza además la gráfica. Sol. $20u^2$

4.- Calcula el área de la región comprendida por la gráfica de $x = -y^2 + y + 12$ con el eje de las y $a=0$, $b=4$. En el intervalo $[a, b]$ está en el eje de las y . Sol. $\frac{104}{3} u^2$

5.- Calcula el área de la región comprendida por la curva de $f(y) = y^3$ con el eje de las y entre $y=0$, $y=\frac{3}{2}$. Traza además la gráfica. Sol. $\frac{81}{64} u^2$

6.- Calcula el área de la región comprendida por la gráfica de $f(x) = x - 4$ con el eje de las x entre $x=-3$, $x=-1$. Traza además la gráfica. Sol. $12 u^2$

7.- Calcula el área de la región limitada por las curvas $y^2 = 9x$ y $y = 3x$. Sol. $\frac{1}{2} u^2$



8.- Calcula el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 9x$.

$$\text{Sol. } \frac{243}{2}u^2$$

9.- Calcula el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = x + 2$.

$$\text{Sol. } \frac{9}{2}u^2$$

X.- Resuelve los siguientes problemas de aplicación.

1.- La pendiente de la recta tangente, en cualquier punto $P(x, y)$, en una curva es $3\sqrt{x}$. Si el punto $(9,4)$ está en la curva, hallar su ecuación.

$$\text{Sol. } y = 2x^{\frac{3}{2}} - 50$$

2.- La función del costo marginal, para cierta mercancía, está dada por $C(x) = 6x - 17$. Si el costo de producción de 2 unidades es de 25 dólares, determinar la función del costo total.

$$\text{Sol. } Ct = 3x^2 - 14x + 25$$

3.- La ganancia marginal de cierta compañía es de $100 - 2q$ dólares por unidad cuando se producen q unidades. Si la ganancia total de la compañía es de 700 dólares cuando se producen 10 unidades, ¿cuál es la función de la ganancia total?

$$\text{Sol. } 100q - q^2 + 700$$

4.- El costo marginal de producir la n -ésima caja de focos es $\frac{5+x^2}{1000}$. Determine cuánto aumenta el costo total con un cambio en la producción de $x=10$ a $x=100$ cajas, además calcule el costo promedio.

$$\text{Sol. } Ct = \frac{5x}{1000} + \frac{x^3}{3000} - 333.45$$

5.- Cuando tiene X años, una cierta maquinaria industrial genera ingresos a un ritmo de $I(X) = 5000 - 20x^2$ dólares por año y da por resultado costos que se acumulan a un ritmo de $C(X) = 2000 + 10x^2$ dólares por año.

a) ¿Cuántos años es provechoso el uso de tal maquinaria?

b) ¿Cuáles son las ganancias netas totales generadas por la maquinaria durante el tiempo obtenido en a)?

$$\text{Sol. } 14.000$$

6.- Después de X horas de trabajo, un obrero industrial está produciendo $Q_1 = 60 - 2(X - 1)^2$ unidades por hora, mientras que un segundo trabajador está produciendo $Q_2 = 50 - 5x$ unidades por hora.

a) Si ambos llegan al trabajo a las 8:00 a.m. ¿Cuántas unidades más habrá producido hasta mediodía el primer trabajador que el segundo?

$$\text{Sol. } 260.1933$$



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA ACADÉMICA
DIRECCIÓN DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR
CENTRO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS No. 13
"RICARDO FLORES MAGÓN"



7.- El siguiente modelo determina en forma aproximada como aumenta el empleo en una ciudad de los Estados Unidos de 1988 a 1995 $E(t) = 25t^2 - 137t + 68$, en miles de personas por año. Donde t es la cantidad en años a partir de 1988. Calcule la cantidad de personas empleadas entre 1990 y 1995.

Sol. 5166

8.- El valor de reventa de cierta maquinaria industrial decrece durante un periodo de 10 años a un ritmo que cambia con el tiempo. Cuando la maquinaria tiene x años, el ritmo al que está cambiando su valor es de $200(x-10)$ dólares por año. ¿Cuál es la depreciación de la maquinaria durante el cuarto año?

Sol. 34.000