INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARIA ACADÉMICA
DIRECCIÓN DE EDUCACION MEDIA SUPERIOR
CENTRO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS No. 13
“RICARDO FLORES MAGÓN”

G U Í A

d e e s t u d i o p a r a presentar ETS de la

CÁLCULO INTEGRAL

CICLO ESCOLAR: 2026_ 2

TURNO: VESPERTINO

Presidente de academia: Aurelio Martín Javier Barrón y Espinosa **Fecha de Elaboración:** abril 2026.

Área:	Nombre de la Unidad de Aprendizaje:	Nivel/semestre:

Básica	Cálculo Integral	Medio Superior/Quinto

Instrucciones generales de la guía:

Esta guía de estudio está diseñada para orientar al estudiante en la preparación autónoma del examen a título de suficiencia de la unidad de aprendizaje de Cálculo Integral.

Presentación:

El Cálculo Integral es una herramienta fundamental dentro de las matemáticas, que permite analizar fenómenos de acumulación, áreas bajo curvas y resolución de problemas en distintos contextos científicos y tecnológicos.

En el nivel medio superior del Instituto Politécnico Nacional, esta asignatura consolida el pensamiento matemático iniciado en el Cálculo Diferencial, promoviendo:

- El razonamiento lógico.
- La modelación matemática.
- La interpretación de resultados en contextos reales.

La presente guía tiene como finalidad brindar al estudiante una estructura clara de los contenidos esenciales del curso, facilitando su preparación para acreditar la unidad de aprendizaje mediante examen de suficiencia.

Objetivos

Desarrollar en el estudiante la capacidad de aplicar los conceptos y técnicas del cálculo integral para resolver problemas matemáticos y contextualizados, demostrando dominio conceptual y procedimental.

Considerando:

- Comprender el concepto de integral como proceso inverso de la derivada.
- Aplicar técnicas básicas y avanzadas de integración.
- Interpretar geométricamente la integral definida como área bajo la curva.
- Resolver problemas de aplicación (áreas, volúmenes, trabajo, entre otros).
- Utilizar el cálculo integral en la modelación de fenómenos reales.

Justificación

El estudio del Cálculo Integral es esencial en la formación académica del nivel medio superior, particularmente en áreas científico-tecnológicas, ya que:

- Permite analizar procesos de cambio acumulativo presentes en física, economía, ingeniería y otras disciplinas.
- Fortalece habilidades de pensamiento analítico, abstracto y lógico.
- Proporciona herramientas para la resolución de problemas complejos.

En el contexto del examen a título de suficiencia, esta guía se justifica como un recurso que organiza y sintetiza los contenidos clave, facilitando el aprendizaje autónomo y el logro de los objetivos académicos.

Estructura y contenidos

Unidad 1: La integral indefinida

Contenidos:

- Concepto de antiderivada
- Notación de integral indefinida
- Propiedades de la integral
- Integrales inmediatas
- Integración por sustitución (cambio de variable)

Enfoque:

Desarrollar habilidades básicas para encontrar primitivas de funciones.

Unidad 2: Métodos de integración

Contenidos:

- Integración por partes
- Integración de funciones racionales
- Fracciones parciales
- Integrales trigonométricas
- Sustituciones trigonométricas

Enfoque:

Aplicar técnicas específicas para resolver integrales más complejas

Unidad 3: La integral definida

Contenidos:

Concepto de suma de Riemann
Definición de integral definida
Propiedades
Teorema Fundamental del Cálculo
Cálculo de integrales definidas

Enfoque:

Relacionar la integral con procesos de acumulación y evaluación en intervalos.

Unidad 4: Aplicaciones de la integral

Contenidos:

- Área bajo la curva
- Área entre curvas
- Volúmenes de sólidos de revolución
- Longitud de arco (según programa específico)
- Aplicaciones en física (trabajo, etc.)

Enfoque:

Interpretar y aplicar la integral en problemas reales y geométricos.

Evaluación

Documento pata estudio, sin validez en la sumatoria de la calificación para el E.T.S.

Materiales para la elaboración de la guía

Material utilizado en la impartición de la asignatura de Cálculo Integral, durante el semestre.

Actividades de estudio

Información adicional

Bibliografía básica

Cálculo Integral .- Rafael Paniagua, José Manuel Casteleiro
Cálculo Integral. – Arturo Aguilar Márquez, Fabián Valapal Bravo Vázquez
Problemas de Cálculo Integral. - Pastor, E.; Varela, V.
Cálculo Integral.- Puig Adam
Introducción al Cálculo Integral. - Alejandre, J.L.; Allueva, A.; González, J.M.

Integrantes de la academia

José Roberto Camacho Montes.

José María Pastor Sánchez.

Horacio Trujillo Islas.

Agustín Sandín Becerra.

Aurelio Martín Javier Barrón y Espinosa

Integración Indefinida:

Algebraicas

1) $\int \left(\frac{3}{5a} \right) dx =$ **2)** $\int \frac{dx}{7\sqrt{x}} =$ **3)** $\int \left(\frac{\sqrt{x^3}}{4a} \right) dx =$

4) $\int \left(\frac{3}{5x^5} \right) dx =$ **5)** $\int \left(\frac{a}{bx^7} \right) dx =$ **6)** $\int \left(\frac{2x^2}{6x^9} \right) dx =$

7) $\int \left(\frac{a}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{x^7}{2} + \frac{1}{5} \right) dx =$ **8)** $\int \left(\frac{3a}{\sqrt{x^7}} \right) dx =$

9) $\int \left(x^9 - \frac{1}{b} + \frac{a}{x^5} \right) dx =$ **10)** $\int \left(\frac{2}{\sqrt[5]{x^7}} \right) dx =$

11) $\int \left(\frac{x^9}{a} \right) dx =$ **12)** $\int \left(\frac{2}{a\sqrt[6]{x^9}} \right) dx =$

13) $\int \left(10 x^{\frac{2}{7}} \right) dx =$ **14)** $\int \left(\frac{2}{x^{\frac{2}{5}}} \right) dx =$ **15)** $\int \left(\frac{\sqrt{2x}}{3} \right) dx =$

16) $\int \left(\frac{b}{\sqrt{5x}} \right) dx =$ **17)** $\int \left(\frac{\sqrt{7x}}{b} \right) dx =$

18) $\int \left(a + 5x^{3} - \frac{1}{7x^{5}} + \frac{b}{3\sqrt{x^{7}}} \right) dx =$

19) $\int \left(\sqrt{\frac{x^{2} + 2x}{4x}} \right) dx =$

TRASCENDENTALES:

1) $\int \frac{2x}{x^2 - 5}\, d(x) =$

2) $\int \frac{x}{x^2 + 3}\, d(x) =$

3) $\int x\sqrt{1 + 4x^2}\, d(x) =$

4) $\int x^2 e^{x^3 + 2}\, dx =$

5) $\int \frac{3x}{e^{5x^3}}\, dx =$

6) $\int (e^x + 6)^3 e^x\, dx =$

7) $\int \frac{1}{3x + 2}\, d(x) =$

8) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}\, d(x) =$

9) $\int \frac{\ln x}{x}\, d(x) =$

10) $\int \frac{2x^2}{6x^3 + 1}\, dx =$

11) $\int \frac{x - 1}{3x^2 - 6x + 5}\, dx =$

12) $\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 5}\, dx =$

13) $\int \frac{x^2}{x^3 + 5}\, dx =$

14) $\int e^{2x}\, dx =$

15) $\int \cos 2x\, e^{\operatorname{sen} 2x}\, dx =$

16) $\int \sec^2 2x\, e^{\tan 2x}\, dx =$

17) $\int 3a^{2x}\, dx =$

TRIGONOMÉTRICAS:

1) $\int \cos 7x \quad d(x) =$ **2)** $\int \operatorname{sen}(ax+b) \quad d(x) =$ **3)** $\int \frac{4}{5} \operatorname{sen} \frac{-3x-2}{2} \quad d(x) =$

4) $\int \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x^2} \, dx =$ **5)** $\int \operatorname{sen} x \cos^4 x \, dx =$ **6)** $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} \, d(x) =$

7) $\int \frac{-5 \cos x}{\sqrt[3]{1 + \operatorname{sen} x}} \, d(x) =$ **8)** $\int \cos^4 3x \operatorname{sen} 3x \, dx =$ **9)** $\int \frac{\sec^2 x}{1 + \operatorname{tg} x} \, dx =$

9) $\int \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x^2} \, dx =$ **10)** $\int x \operatorname{sen}(3x^2 + 7) \, dx =$ **11)** $\int \tan \frac{x}{2} \, dx =$

12) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx =$ **13)** $\int 3 \cos (2x - 6) \, dx =$ **14)** $\int \frac{\cos \ln x}{x} \, dx =$

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx =$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx =$

3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}\,dx =$

4) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx =$

5) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-25}}\,dx =$

6) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{9+x^2}}\,dx =$

7) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

8) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+9}\,dx =$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS A LA "N" POTENCIA:

1) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx =$

2) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 3x\,dx =$

3) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx =$

4) $\int \text{sen}^5 7x\, dx =$

5) $\int \text{sen}^5 x \cos^2 x\, dx =$

6) $\int \text{sen}^2 2x \cos^3 2x\, dx =$

7) $\int \cos^2 7x\, dx =$

8) $\int \text{sen}^2 4x\, dx =$

9) $\int \cos^4 x\, dx =$

10) $\int \text{sen}^4 5x\, dx =$

11) $\int \text{sen}^2 x \cos^2 x\, dx =$

12) $\int \text{sen}^4 x \cos^2 x\, dx =$

13) $\int \cot^4 x\, dx =$

14) $\int \cot^3 x \csc^4 x\, dx =$

15) $\int \tan^4 x \sec^4 x\, dx =$

16) $\int \tan^{\frac{1}{2}} x \sec^4 x\, dx =$

INTEGRACIÓN POR PARTES:

1) $\int \ln x\, dx =$

2) $\int x^2 \ln x\, dx =$

3) $\int x^2 e^x\, dx =$

4) $\int x\sqrt{1+x}\, dx =$

5) $\int (7-8x)\, e^{2x}\, dx =$

6) $\int e^x \cos 7x\, dx =$

7) $\int \ln \sqrt[3]{x}\, dx =$ **8)** $\int x \operatorname{sen} x\, dx =$ **9)** $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx =$

10) $\int x^2 \cos x\, dx =$ **11)** $\int \sqrt[3]{x}\, \ln x\, dx$ **12)** $\int \sec^3 x\, dx =$

13) $\int x^3 e^x\, dx =$ **14)** $\int e^{2x} \operatorname{sen} 3x\, dx =$ **15)** $\int x^2 \cos 3x\, dx =$

INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES:

1) $\int \frac{5x + 3}{x^2 + x}\, dx =$ **2)** $\int \frac{5x - 7}{x^2 - 3x + 2}\, dx =$ **3)** $\int \frac{dx}{x^2 - 9} =$

4) $\int \frac{2x + 3}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx =$ **5)** $\int \frac{2x - 19}{(2x + 3)(3x - 1)}\, dx =$

6) $\int \frac{x - 6}{(x + 3)(2x - 5)} dx =$

7) $\int \frac{x}{(x + 1)(x + 3)(x + 5)} dx =$

8) $\int \frac{x^2}{x^2 + x - 6} dx =$

9) $\int \frac{x}{(x+1)(x+3)(x + 5)} dx =$

10) $\int \frac{2x - 1}{(x - 1)(x - 2)} dx =$

11) $\int \frac{x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx =$

12) $\int \frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx =$

13) $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} dx =$

14) $\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} dx =$

15) $\int \frac{dx}{x^2 + 5x - 6} =$

INTEGRACIÓN DEFINIDA:

1) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x - 1)^3} dx =$

2) $\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{1 + x}} dx =$

3) $\int_{0}^{1} x\sqrt{x^2 + 9}\, dx =$

4) $\int_{2}^{3} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx =$ **5)** $\int_{-2}^{5} \frac{1}{x^2}\, dx =$ **6)** $\int_{-1}^{2} (2x^2 - 4x + 5)\, dx =$

7) $\int_{-1}^{3} (2x^2 - 4)\, dx =$ **8)** $\int_{2}^{-1} 3x(x - 5)\, dx =$ **9)** $\int_{0}^{3} (3x^2 - 7x + 2)\, dx =$

10) $\int_{1}^{10} \sqrt{5x + 1}\, dx =$ **11)** $\int_{1}^{2} (5x^2 + 3x - 10)\, dx =$ **11)** $\int_{-2}^{0} 3x\sqrt{4 - x^2}\, dx =$

13) $\int_{3}^{7} \left(\frac{5}{x^2} + x^{-3}\right) dx =$ **14)** $\int_{0}^{3} (-x^2 + x - 1)\, dx =$ **15)** $\int_{- -3}^{0} \frac{1}{9 + 2x}\, dx =$

CALCULO DEL ARA ENTRE LA CURVA:

1) $y(x) = 4x - x^2$ en el eje x=1, x= 3

2) $y(x) = \sqrt{x + 1}$ en el eje x= -1, x= 8

3) $y(x) = 6x^2 - 3x^3$ en el eje x= 0, x=2

4) Hallar el área limitada por la recta $x + y = 10$, el eje OX en $x = 2$, $x = 8$.

5) Determinar el área de la función, $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ en el intervalo de 2 a 6 sobre el eje de las abscisas:

6) Calcular el área de las regiones del plano limitada por la curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$, el eje OX.

7) Determine el área bajo la curva $f(x) = (2x - 5)^3$ en el intervalo de 0 a 2:

8) Calcular el área limitada por la curva $y = -x^2 - 6x - 5$ y el eje de las abscisas?

9) Calcular el área bajo la curva de la función $f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$, el eje de las abscisas:

CALCULO DEL ÁREA ENTRE DOS CORVAS:

1) Determinar el área entre la curva $y(x)= x^2$ y la recta $y(x) = 2x+3$.

2) Determinar el área entre la curva y le recta representadas por las funciones:

$$f(x) = x^2 + 2x \qquad g(x) = -x + 4$$

3) Calcular el área estructurada por la recta $y = 3 - x$, la curva $y = x^2 - 9$.

4) Calcular el área limitada por la curva $y(x) = x^2 - 5x + 6$ y la recta $y = 2x$.

5) Calcular el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = x$

6) Calcular el área entre las curvas: $y_1(x) = x^4 + x^2 + 6x$ $y_2(x) = x^4 + x^3$

7) Determinar el área entre la curva y la recta: $y_1(x) = x^2 - 1$ $y_2(x) = x + 1$

8) Determine el área comprendida entre la curva y la recta:

$$y_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \qquad y_2(x) = \frac{1}{2}x$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE INTEGRACIÓN DEFINIDA:

1) Una población A(t) de animales aumenta con una rapidez anual dada por R(t) = 300 + 40t, donde “t”, esta medida en años. ¿Calcula cuanto aumenta la población entre los años 5 y 8?

2) La velocidad de un automóvil en el arranque está dada por la función:

$$v(t) = t^3 + 2t$$

donde el “t “está en segundos y la velocidad está dada en metros ¿Qué distancia recorre en los primeros 4 segundos?

3) La función del costo marginal de producir **“**q” unidades en una semana está dada por:

$$C'(x) = 25 - 0.02q$$

Si la compañía actualmente produce 150 unidades por semana del producto. ¿Determine el costo extra por semana que deberá considerarse al elevar la producción de 150 a 200 unidades por semana?

4) La función de costo marginal de un fabricante está dada por:

$$C'(x) = 0.6\,Q + 2$$

Si la producción actual es de 80 unidades por semana ¿Cuánto más costar incrementar la producción 10 unidades por semana?

5) La función del costo marginal es $C'(x) = 0.2q + 8$**,** Si la producción actual es de 65 unidades por semana. ¿Cuánto más costará incrementar la producción a 75 unidades por semana?

6) La función del costo marginal de una empresa es:

$$C'(x) = 0.004\,t^2 - 0.5q + 50$$

Donde "C" está en dólares. Si la actual es de 65 unidades por semana ¿Cuánto más costara incrementar la producción a 75 unidades por semana?