

MATERIAL  
DE GUIA  
PARA ESTUDIAR PARA LOS  
EXAMENES DE ALGEBRA.

Integrantes de la academia de Álgebra:

ING. CARLOS ALBERTO ARCHILA AGUILA  
LIC. JORGE GONZALEZ YEDRA  
ING. JORGE MENDEZ CRUZ

# Índice

## **Unidad de Competencia I** **Expresiones y Operaciones Algebraicas.**

### **Competencias genéricas**

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas.

4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

### **Competencias disciplinares**

M-1 Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

### **Propósito de la Unidad de Competencia**

Conoce el lenguaje algebraico básico para aplicar las propiedades de los signos y de los exponentes en la realización de las operaciones básicas de expresiones algebraicas.

### **Contenido específico:**

#### **Expresiones Algebraicas**

1. Definición y elementos de una expresión algebraica y término algebraico (Signo, coeficiente numérico, variable y exponente).
2. Clasificación de las expresiones algebraicas.
3. Lenguaje algebraico (Traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa).

#### **Operaciones con expresiones algebraicas**

4. Suma y resta de expresiones algebraicas (Términos semejantes, Leyes de los signos en suma y resta de polinomios).
5. Multiplicación de expresiones algebraicas. (Leyes de los signos, Leyes de los coeficientes, Leyes de los exponentes enteros positivos y negativos), Multiplicación de monomio por monomio, monomio por polinomio y de polinomio por polinomio.
6. Productos notables. (Cuadrado de un binomio, cubo de un binomio, Producto de binomios conjugados, Producto de Binomios con término común).
7. División de expresiones algebraicas. (Leyes de los signos, Leyes de los coeficientes, Leyes de los exponentes enteros positivos y negativos), División de monomio entre monomio y División de polinomio entre monomio.

## **Unidad de Competencia II**

### **Ecuaciones, Sistemas de Ecuaciones Lineales y Factorización**

#### **Competencias genéricas**

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

#### **Competencias disciplinares**

M-2 Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

#### **Propósito de la Unidad de Competencia**

Resuelve problemas que se plantean en lenguaje algebraico, numérico y gráfico; formula expresiones en forma de producto, utilizando técnicas básicas de factorización.

#### **Contenido específico:**

##### **Factorización de expresiones algebraicas.**

1. Factorización de expresiones que tienen factor común (Factor común monomio y polinomio).
2. Factorización de expresiones que tienen factor común al agrupar términos.
3. Factorización de una diferencia de cuadrados.
4. Factorización de trinomios cuadráticos (Trinomios cuadrados perfectos, Trinomios de la forma  $x^2+bx+c$  y Trinomios de la forma  $ax^2+bx+c$ ).
5. Factorización de una suma y de una diferencia de cubos.

##### **Representación y resolución de ecuaciones lineales y de sistemas de ecuaciones lineales.**

6. Resolución de ecuaciones lineales con una incógnita (Con coeficientes enteros).
7. Resolución de problemas mediante la aplicación de ecuaciones de primer grado.
8. Resolución de Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (Métodos de: eliminación, sustitución e igualación) y planteamiento de problemas que dan lugar a un sistema de ecuaciones lineales.

## Unidad de Competencia I

### Expresiones y Operaciones Algebraicas.

#### Álgebra

Rama de las matemáticas que trata a las cantidades de manera general.

#### Expresiones algebraicas

Se conoce así a la combinación de números reales (*constantes*) y literales o letras (*variables*) que representan cantidades, mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación, etcétera.

#### Término algebraico.

Es una expresión compuesta por números concretos y letras que también representan números relacionados entre sí mediante las operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación. A todo término algebraico se le denomina *monomio* y consta de: coeficiente, base(s) y exponente(s).

#### Elementos de un término algebraico

Los elementos de un término son:

- El signo
- El coeficiente o variable.
- La parte literal
- Exponente

**Signo:** respecto al signo de un término, será negativo si le precede el signo menos (-) y positivo si le precede el signo más (+).

**Coficiente o variable numérica:** si un término algebraico es el producto de un número concreto por uno o más numérico literales, dicho número es su coeficiente numérico

**Literal:** la parte literal la constituyen las letras del término algebraico con sus respectivos exponentes.

**Exponentes:** Es la operación en la cual la cantidad llamada base se debe multiplicar por ella misma las veces que lo indique el exponente.

### Ejemplos

Término	Coficiente	Base(s)	Exponente(s)
$-8y^3$	-8	y	3
$\frac{1}{3}mn^x$	$\frac{1}{3}$	m, n	1, x
$-\frac{3}{4}(2x+1)^{-2}$	$-\frac{3}{4}$	(2x + 1)	-2

**Grado de un término:** es la suma de los exponentes de sus factores literales.

### Términos semejantes.

Son los que tiene la misma parte literal, es decir, tienen las mismas letras afectadas de iguales exponentes.

### Reducción de términos semejantes

Esta operación consiste en sustituir dos o más términos semejantes por uno solo, que resulta de la suma o resta algebraica de sus coeficientes numéricos multiplicados por su parte literal.

**Actividad 1:**

Determina en cada ejercicio el coeficiente numérico, la parte literal, los exponentes y el grado de cada término.

1. $7x^3$	2. $-5ab^2$	3. $6x^2y^3c$
4. $-\frac{2}{5}rs^x$	5. $\frac{5}{7}x^2y$	6. $9m^3n^2o$
7. $-r^2st^3$	8. $a$	9. $a^5bc^3$
10. $-\frac{2}{3}x^2ym^3$		

**Actividad 2:***Reduce los términos semejantes.*

1. $5a - a + 3a$	2. $a^2y + 7a^2y$	3. $4ab^2 + 7ab^2 + ab^2$
4. $6r^3s + 7r^3s$	5. $-a - a$	6. $-3x - 2x$
7. $-8a - 9a$	8. $-7b - b$	9. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a$
10. $\frac{2}{5}n + \frac{1}{10}n$	11. $\frac{2}{3}m + \frac{3}{7}m$	12. $\frac{3}{4}w + \frac{2}{5}w$
13. $-\frac{7}{9}q - \frac{2}{3}q$	14. $-\frac{13}{7}x - \frac{8}{7}x$	15. $\frac{5}{9}a + \frac{4}{9}a$
16. $-\frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{6}y^3$	17. $20y^3 - 18y^3$	18. $6n^2 - 20n$
19. $-8ab^2 + 3ab^2$	20. $-5x^2 + 17x^2$	21. $-6xy^3 + 12xy^3 - 8xy^3 + 10xy^3$
22. $-x^2 - x^2 - x^2$	23. $-9x^2y + 9x^2y$	24. $8a^2b - 5ab^2$

25. $9m^3n^2o + 12m^3n^2o - 3m^3n^2o$	26. $-r^2st^3 + r^2st^3$
27. $r + 4 + 3r + 12$	28. $x + 2y + 7x - 9x - 3y - 12xy$
29. $\frac{5}{7}x^2y + \frac{3}{8}xy^2 - \frac{6}{14}x^2y - \frac{6}{16}xy^2$	30. $a^5bc^3 - 12abc + \frac{3}{2}a^6bc^3 + \frac{3}{4}abc$
31. $-\frac{2}{5}rs^2 + \frac{7}{5}st - \frac{6}{5}rs^2 + 3st$	32. $2x^2yz - 3xy^2z + 5xyz^2 - yxy^2z - x^2yz + 6xyz^2$
33. $6x^2y^3c - 2x^2y^3c + \frac{5}{3}x^2y^3c$	34. $-\frac{2}{3}x^2ym^3 + \frac{7}{9}xy^2m + 3x^2ym^3 - 4xy^2m$

### Ejercicio 1:

*Simplifica las siguientes expresiones*

1.  $-3x - 8x$

2.  $6a^2b + 7a^2b$

3.  $-6xy^2 - xy^2 - 3xy^2$

4.  $4xy^4z^3 - 4xy^4z^3$

5.  $-2a^2b + 12a^2b$

6.  $-3a + 5a - 10a$

7.  $4x - 3x - 2x$

8.  $7ab + 4ab - 3ab$

9.  $5a^2 - 7a^2 + 3a^2 - 2a^2$

10.  $-m + n + m + n$

11.  $\frac{1}{4}a^3b - \frac{3}{5}a^3b + \frac{1}{6}a^3b$

12.  $-3a^{x+1} + 2a^{x+1} - a^{x+1} + 2a^{x+1}$

13.  $0.25b - 0.4b + 0.2b$

14.  $\frac{1}{2}ab^3c - \frac{3}{2}ab^3c + ab^3c$

15.  $4m^{x-2} - 10m^{x-2} + 3m^{x-2}$

16.  $8x - 3y - 9x + 5y - 2x + y$

17.  $10a - 7b + 4a + 5b - 14a + 3b$

18.  $-12m + 3n - 4m - 10n + 5m - n$

19.  $12a^2b + 3ab^2 - 8a^2b - 10ab^2 - 3a^2b + 6ab^2$

20.  $9a^3b^2c - 5a^2bc^2 - 12a^3b^2c + 3a^2bc^2 + 4a^3b^2c$

21.  $-3x^2 + 2y^2 - 7 + 10x^2 - 12y^2 + 15$

22.  $-81m^2 - 17mn + 15n^2 + 20m^2 + 3mn - 17n^2 + 53m^2 + 18mn + 7n^2$

**Lenguaje Algebraico:** frecuentemente, en la resolución de problemas matemáticos se requiere escribir una expresión algebraica que represente un enunciado verbal o viceversa.

Lenguaje Común	Lenguaje Algebraico
El doble de un numero	$2x, 2y, 2w$
La diferencia de dos números	$a - b, x - y, w - m$
La raíz cuadrada de un numero	$\sqrt{x}, \sqrt{a}, \sqrt{y}$
El triple del cubo de un numero	$3x^3, 3a^3, 3n^3$
El producto de dos números	$ab, xy, mn$
El cociente de dos números	$\frac{x}{y}, \frac{a}{b}, \frac{m}{n}$
La mitad de un numero	$\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}y$
El doble de un numero disminuido en 5	$2x - 5, 2a - 5, 2m - 5$

**Actividad 3:**

*Traduce correctamente al lenguaje algebraico.*

1. La suma de 10 y x	2. La raíz cuadrada de un número	3. Un número disminuido en cuatro
4. El triple de un número dividido entre 7	5. El cociente de dos números aumentado en dos	6. La semidiferencia de dos números
7. La edad de una persona hace 5 años	8. El cubo de un número por el cuadrado de otro número	9. La diferencia de dos cuadrados
10. La mitad de un número	11. La cuarta parte del cubo de un número	12. El triple de un número aumentado en diez
13. El doble del cuadrado de un número disminuido en ocho	14. El cociente del cubo de un número entre otro número	15. La raíz cuadrada del triple de un número
16. La raíz cuadrada del cubo de la diferencia de dos números	17. el cuádruplo del cuadrado de un número.	18. Ocho veces el cubo de un número disminuido en 3

**Ejercicio 2:**

*Traduce correctamente al lenguaje algebraico.*

**Lenguaje Común****Lenguaje Algebraico**

---

Un número cualquiera.

Un número cualquiera aumentado en siete.

La diferencia de dos números cualesquiera.

El doble de un número excedido en cinco.

La división de un número entero entre su antecesor.

El cuadrado de un número.

La mitad del cuadrado de un número.

La semisuma de dos números.

Las dos terceras partes de un número disminuido en cinco es igual a 12.

Tres números naturales consecutivos.

La parte mayor de 1 200, si la menor es  $w$ .

El cuadrado de un número aumentado en siete.

Las tres quintas partes de un número más la mitad de su consecutivo equivalen a 3.

La raíz cuadrada de la diferencia de dos cantidades.

El producto de un número positivo con su antecesor equivale a 30.

El cubo de un número más el triple del cuadrado de dicho número.

Un número disminuido en tres.

## Clasificación de Polinomios

De acuerdo con el número de términos que tienen los polinomios se clasifican:

- **Monomio:** es un polinomio que consta de un solo término
- **Binomio:** es un polinomio que consta de dos términos.
- **Trinomio:** es un polinomio que consta de tres términos
- **Polinomio:** consta de cuatro o más términos.

## Suma de Polinomios

Para sumar dos o más polinomios se requiere reducir los términos semejantes de los polinomios que se suman. Para ello pueden escribirse los polinomios en renglones sucesivos de forma que los términos semejantes queden en la misma columna y a continuación se reducen los términos semejantes.

Ejemplo.

Suma los polinomios indicados:

A)  $9x^3 + 3x^2 + 2x + 8$  y  $6x^2 - 4x - 2$

$9x^3$	$3x^2$	$2x$	$8$
	$6x^2$	$-4x$	$2$
<hr/>			
$9x^3$	$9x^2$	$-2x$	$6$

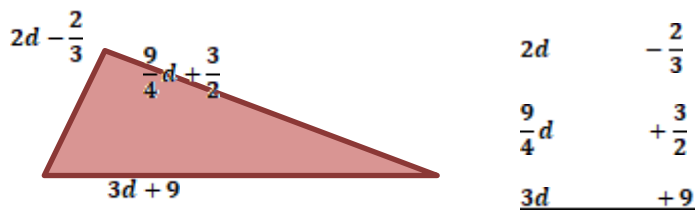
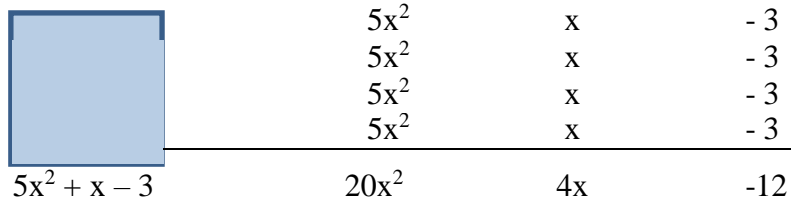
B)  $4x^3 - 8 + 6x^2 - x^4 - 9$ ;  $2x - 4x^2 - 5 + x^3 - x^4$ ;  $-5x^3 - 2x^4 + 19 + 3x - x^2$

$-x^4$	$4x^3$	$6x^2$	$-9x$	$-8$
$-x^4$	$x^3$	$-4x^2$	$2x$	$-5$
$-2x^4$	$-5x^3$	$-x^2$	$3x$	$19$
<hr/>				
$-4x^4$	$0x^3$	$x^2$	$-4x$	$+6$

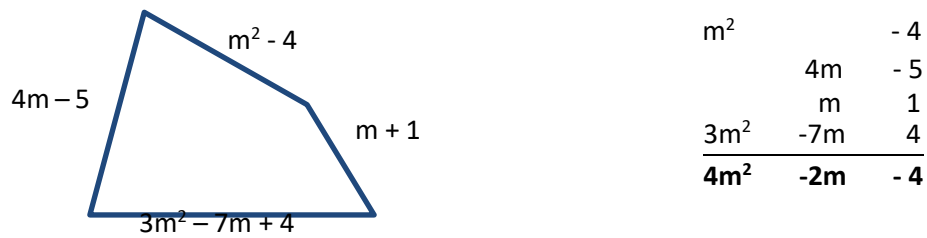
La aplicación de la suma de polinomios se lleva a cabo cuando se tienen situaciones que pueden generalizarse por ejemplo puede ser el cálculo de perímetros.

**Ejemplo.**

Determina el perímetro de las siguientes figuras

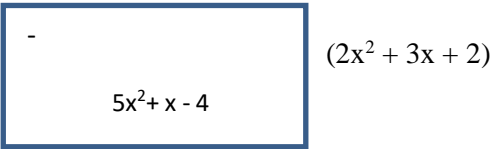
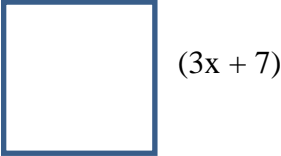
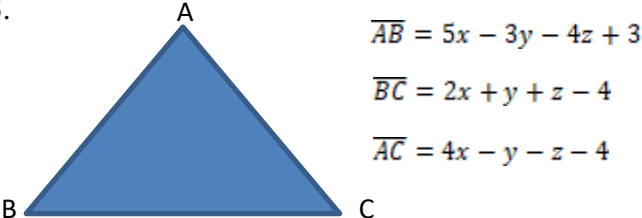


Verónica desea vender un terreno como el de la figura, ¿Cuál es la expresión polinomial que representa el perímetro del terreno?



**Actividad 4:**

Realiza las siguientes sumas de polinomios.

1. $3a^2 - 6a + 4$ ; $a^2 - 2a - 1$	2. $3a + 7b - 5c - 1$ ; $a - 10b + 5c - 1$
3. $5x - 4y + 10$ ; $-7x - 3y - 10$	4. $2r^3 - 9r^2 - 10r + 3$ ; $r^3 + 3r^2 - r - 8$
5. $(15xy + 6y - 8x - z + 3) + (-12 + 4x + xy - 6y - z)$	6. $(x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 5 + 8x) + (-4x - 1 - 7x^2 - x^3 - 2x^4)$
7. $4st - 3t + u$ ; $-4u - 9st$ ; $5st - 6u + 10t$	8. $-m^2 + 16mn - 8m - 9n + 8$ ; $-4mn - 5 + 2n - m + m^2$
9. $(7mn - 2m + n - 5) + (mn + 2m - 2) + (5n - 9mn + 6)$	10. $(-4x - 12y + z) + (3x + 9z - y) + (-5z + 3y + 2x)$
11. Determina la expresión polinomial que represente el perímetro de las siguientes figuras.	
	
12. 	
13. 	

**Ejercicio 3:**

Realiza lo siguiente:

1. Suma los polinomios  $3x - 8y - 2z$ ;  $7x + 3y + z$
2. ¿Cuál es la suma de  $-5m - 3n + 6$  con  $2m + 2n - 8$
3. Realiza  $(11a - b + c) + (-8a - c)$
4. Efectúa  $(3p - 5q - 6r) + (2p + 3q - 2r) + (-12p + 4q + r)$
5. Suma  $6x^2 + 3x - 2$  con  $-x^2 + 7x + 4$
6.  $(8a^2 - 6a^3 + 4a) + (4a^3 + a^2 - 4a - 5)$
7.  $(5x^4 - 3x^2 + 6x - 3) + (-3x^4 + x^3 + 5x^2 - 7x + 3)$
8. Realiza  $(5x^2 - 5x + 6) + (2x^2 - 7x + 4) + (-6x^2 + 10x - 10)$
9. Suma  $y^3 - y$ ;  $2y^2 - 5y + 7$ ;  $4y^3 - 5y^2 + 3y - 8$
10. ¿Cuál es el resultado de sumar  $8z^3 - 9$ ;  $-4z^3 + 2z^2 + 6$ ;  $5z^2 - 2z^3 - 7z + 2$ ?
11. Efectúa la suma de  $4x^2 - 10xy - 12y^2$ ;  $3y^2 - 10x^2 + 5xy$ ;  $8xy - 3x^2 - 2y^2$
12. Realiza  $(x^5 - 3x) + (x^4 + 6x) + (-x^3 - 2)$
13. ¿Cuál es el resultado de la suma de  $-15x^3y - 3x^2y^2 - 6xy^3$ ;  $-8x^3y + 2x^2y^2 - 4xy^3$ ?
14. Suma  $x^4 - y^4$ ;  $-x^3y + x^2y^2 - xy^3$ ;  $3x^4 + 5x^3y - 4x^2y^2$ ;  $-5x^3y + 3x^2y^2 - 3y^4$
15. Realiza  $(3a^6 - 4a) + (7a^4 + 6a^2) + (-3a^2 + 7a) + (-a^4 - 4a^2)$
16. Suma los polinomios  $\frac{5}{2}x^2 - 5xy + \frac{2}{3}y^2$ ;  $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}xy - \frac{1}{4}y^2$ ;  $-2x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{3}{4}y^2$
17. Efectúa  $\left(-\frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{2}ab\right) + \left(-\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{5}{6}ab\right) + \left(-\frac{2}{3}b^2 + \frac{3}{4}ab + \frac{5}{6}a^2\right)$
18. Suma los polinomios  $\frac{1}{6}x^2y - \frac{3}{5}y^3 + \frac{1}{8}xy^2$ ;  $x^3 - \frac{1}{2}x^2y - y^3$ ;  $\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}xy^2 - \frac{2}{5}y^3$
19. Efectúa  $\left(x^2 - \frac{1}{2}y\right) + \left(\frac{1}{3}x^3 - 2y\right) + \left(-\frac{5}{2}x - \frac{1}{3}y\right)$
20. Suma  $x^5 - y^5$ ;  $\frac{1}{10}x^3y^2 - \frac{3}{4}xy^4 - \frac{1}{6}y^5$ ;  $\frac{3}{5}x^4y - \frac{5}{6}x^2y^3 - \frac{1}{9}y^5$ ;  $2x^4y - \frac{2}{5}x^3y^2 - \frac{1}{3}y^5$
21.  $\left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + 2\right) + \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}x^4 + x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x - 1\right) + \left(-\frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right)$

## Resta de polinomios

En principio, toda resta de polinomio puede expresarse como una suma aplicando la regla siguiente:

$$\mathbf{x - y = x + (-y)}$$

En otras palabras, para restar dos polinomios se suma el minuendo con el inverso aditivo del sustraendo.

Se acostumbra a escribir en un renglón los términos del minuendo y por debajo de éste los que corresponden al inverso aditivo, de forma que los términos semejantes estén colocados en la misma columna; por último, se procede a reducir términos semejantes.

Ejemplo:

A) Resta el polinomio  $-10x^4 + 8x^3 - 7x - 4 + 5x^2$  de  $10x^2 - 6x^4 + x - 10 - x^3$

De acuerdo con el orden tenemos

$$10x^2 - 6x^4 + x - 10 - x^3 - (-10x^4 + 8x^3 - 7x - 4 + 5x^2)$$

Ordenamos:

$-6x^4$	$-x^3$	$10x^2$	$x$	$-10$
$10x^4$	$-8x^3$	$-5x^2$	$7x$	$4$
<hr/>				
$4x^4$	$-9x^3$	$5x^2$	$8x$	$-6$

B) Sustraer  $6x^2 - 4x - 2$  de  $9x^3 + 3x^2 + 2x + 8$

$9x^3$	$3x^2$	$2x$	$8$
	$-6x^2$	$4x$	$2$
<hr/>			
$9x^3$	$-3x^2$	$6x$	$10$

**Actividad 5:**

Realiza las siguientes restas de polinomios.

1. $2a - (2+5a)$	2. $3 - x - (2x-4)$
3. $(5x - 4y) - (7x + y)$	4. $(a-3b) - 3(a-2b)$
4. $9 - (a^b + a^2 + 3) - (a^b+2)$	5. Sustraer $3x - 3$ de $5x - 1$
6. $(15xy + 6y - 8x - z + 3) - (-12 + 4x + xy - 6y - z)$	7. $(x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 5 + 8x) - (-4x - 1 - 7x^2 - x^3 - 2x^4)$
8. $(4st - 3t + u) - (-4u - 9st)$	9. Sustraer $(-m^2 + 16mn - 8m - 9n + 8)$ de $(-4mn - 5 + 2n - m + m^2)$
10. $(7mn - 2m + n - 5) - (mn + 2m - 2)$	11. $(-4x - 12y + z) - (3x + 9z - y) - (-5z + 3y + 2x)$

De los siguientes ejercicios restar el segundo polinomio del primero

12. $6x^2 + 3y^2 - 7x + 4y - 2$ ; $2x^2 - y^2 - 7x + 8$	13. $x^2 + 3x - y + 6$ ; $-12 + 6y - 2x + 2x^2$
14. $a^3 - 6b^2 + c^3$ ; $3c^3 + 6b^2 - 2a^3$	15. $\frac{5}{8}x - \frac{1}{4}y$ ; $-\frac{9}{8}x - \frac{3}{8}y$
16. $\frac{1}{2}f + \frac{2}{3}g$ ; $\frac{1}{3}f - \frac{1}{4}g$	17. $3m - 4mn + 6n - 8$ ; $-10 - n + 7m + 2mn$
18. $-7c + 4b + 3a - 4$ ; $2b + 5a + 4 - 7c$	19. $x^3 + 3x^2y - 5xy^2 - 4y^3$ ; $2y^3 - 4xy^2 + 2x^3 - 7x^2y$

Si  $A = 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ ;  $B = -x^3 + x^2 - 7x$  y  $C = 6x^2 + 4x + 4x^3 + 5$ , resuelve las siguientes operaciones.

20. $(A+B) - C$	21. $(A-C) + B$
-----------------	-----------------

**Actividad 6:**

**Relaciona las columnas. Las respuestas están ordenadas de mayor a menor exponente.**

$$A = x^3 - 3x + x^2 + 6, \quad B = 3x^3 + 18 - 5x^2 + 7x$$

- a.  $A+B$                     ( )  $5x^3 - 11x^2 + 17x + 30$
- b.  $A-B$                     (✓)  $-x^3 + 7x^2 - 13x - 6$
- c.  $B-A$                     ( )  $2x^3 - 6x^2 + 10x + 12$
- d.  $A + 2B$                 ( )  $8x^3 - 8x^2 + 8x + 48$
- e.  $2A + B$                 ( )  $4x^3 - 12x^2 + 20x + 24$
- f.  $2A - B$                 ( )  $-2x^3 + 6x^2 - 10x - 12$
- g.  $2B - 2A$                 ( )  $-8x^3 + 8x^2 - 8x - 48$
- h.  $2B - A$                 ( )  $7x^3 - 9x^2 + 11x + 42$
- i.  $2A + 2B$                 ( )  $4x^3 - 4x^2 + 4x + 24$

#### Ejercicio 4:

Realiza las siguientes operaciones:

1. De  $5a^2 - 3a + 2$  resta  $8a^2 - 5a + 7$

2. ¿Cuál es el resultado de  $(3x^3 - 5x^2 - 6x + 3) - (2x^3 + 4x - 8)$

3. De  $4d^4 - 10d^3 + 2d^2 - 3d - 4$  resta  $5d^5 - 3d^3 + 6d - 3$

4. Efectúa  $(4r^3y^2 - 5r^2y^3 + 6r^4y - 8ry^4) - (12r^2y^3 - 3ry^4 + 4r^3y^2 - 9r^4y)$

5. De  $7 - 8a^5b + 3a^3b^3 - 6a^4b^2 + 2ab^5$  resta  $5a^3b^3 - 3ab^5 + 8 - 7a^5b - 2a^4b^2$

6. Realiza  $(3x^{a+2} - 7x^{a+1} - 8x^a + 3x^{a-1}) - (4x^{a+2} + 6x^{a+1} - 7x^a - 9x^{a-1})$

7. De  $5a^{2m-1} + 6a^{2m} - 8a^{m+1} - 3a^{m-3}$  resta  $12a^{2m} - 5a^{2m-1} - 3a^{m+1} - 4a^{m-3}$

8. ¿Cuál es el resultado de  $\left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 6x + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{2}{x}x - 1\right)$

9. De  $\frac{1}{6}m^2n^4 + 6mn^4 + m^4n - \frac{2}{5}m^3n^2$  resta  $\frac{1}{3}m^4n + \frac{3}{2}m^2n^3 + 8mn^4 - m^3n^2$

10. De  $\frac{2}{5}a^2b^2 + 3a^3b - 4a^4 + \frac{1}{6}b^4$  resta  $-\frac{3}{2}a^4 + \frac{1}{5}a^3b + \frac{1}{2}b^4 + \frac{2}{3}a^2b^2$

11. Resta  $8x - 3y - 6$  de  $5x + 4y - 1$

12. Realiza  $(a^2 + a - 1) - (a^2 - a + 1)$

13. Resta  $-8x^3 + 6x^2 - 3x - 2$  de  $10x^3 - 12x^2 + 2x - 1$

14. ¿Cuál es el resultado de sustraer  $12a^4 - 3a^2 + a - 8$  de  $14a^4 - 5a^2 - 3$ ?

15. Sustraer  $16x^6y^4 - 3x^3y^2 + 8x^7y^5$  de  $4x^7y^5 + 9x^3y^2 - 10x^6y^4$

## Multiplicación de Polinomios

Para realizar esta operación es conveniente recordar las reglas de los signos.

### Reglas de los signos: (importante)

$$(+)(+)=+ \quad (+)(-)= - \quad (-)(+)= - \quad (-)(-)= +$$

### Ley de los exponentes para la multiplicación.

En la multiplicación de términos con la misma base los exponentes se suman.

$$a^m * a^n = a^{m+n} \text{ (Importante)}$$

Respecto a la multiplicación y en cuanto a los polinomios distinguiremos tres casos:

- Multiplicación de monomios.
- Multiplicación de un monomio por un polinomio.
- Multiplicación de un polinomio por un polinomio.

En seguida se explica cómo realizar cada uno de estos tipos de multiplicaciones.

### Multiplicación de monomios

En la multiplicación de dos o más monomios se aplican las reglas de los signos, las leyes de los exponentes y los axiomas de la multiplicación.

Para multiplicar dos o más monomios podemos seguir estos pasos:

1. Se determina el signo del producto.
2. Se multiplica los coeficientes numéricos.
3. Se multiplican las partes literales aplicando las leyes de los exponentes respectivamente.

Ejemplo:

A) Multiplica los monomios siguientes:  $(3x^2y)$  y  $(7xy^4)$

$$(3x^2y)(7xy^4) = (3)(7)x^{2+1}y^{1+4} = \underline{21x^3y^5}$$

B) Multiplica los monomios siguientes:  $(-3x^2y)$  y  $(7xy^4)$

$$(3x^2y)(7xy^4) = (-3)(7)x^{2+1}y^{1+4} = \underline{-21x^3y^5}$$

C) Multiplica los monomios siguientes:  $(-5x^2y)$   $(-4xy^4)$

$$(-5x^2y)(-4xy^4) = (-5)(-4)x^{2+1}y^{1+4} = \underline{20x^3y^5}$$

D) Multiplica los monomios siguientes:  $(3x^ay)$  y  $(7xy^b)$

$$(3x^ay)(7xy^b) = (3*7) x^{a+1}y^{1+b} = \underline{21x^{a+1}y^{1+b}}$$

**Nota:** Observa que las potencias de cada factor (tanto de  $x$  como de  $y$ ) se suman.

**Actividad 6:**

Realiza las siguientes multiplicaciones de monomios.

1. $7x^3y(3xy^5)$	2. $(-8xy^2)(7xy)$	3. $(-4m^2n)(-5mn^2)$
4. $(5ab)(-7abc)$	5. $(3ab)(-3bc)$	6. $(-3r)(5r)(-8r^4)$
7. $(6a^2b)(-3ab^5)(-2a^2b^4c)$	8. $3x^2y^3(2x^3y^4)(-5xy)$	9. $(-4m^2n^3)^3(7mn^4)^2$
10. $(-3a^xb^y)(-7abc)$	11. $(3a^{y+1}b^{x+1})(-3b^{x+2}c)$	12. $(-4m^xn^y)(-5m^2n^2)$
13. $(-2w^2xy^3)^3(-4w^2y)^2$	14. $(-2x^2y^3)^3(-2xy^3)^2$	15. $(-5a^2b^4)^3$

**Ejercicio 5:**

Resuelve las siguientes multiplicaciones de monomios:

1.  $(5x)(-7x)$

2.  $(4x^3y^5z)(6x^5y^4z)$

3.  $(-8r^5s^2)(3r^4ts^6)$

4.  $\left(\frac{3}{7}abc\right)\left(-\frac{2}{4}c^4\right)$

5.  $(-12n^4o)(-6n^3o^3)$

6.  $(9c^5m^9p^2)\left(-\frac{2}{3}c^6m\right)$

7.  $(-mno)(mno)$

8.  $(pq)(-5p^3q^2)$

9.  $\left(-\frac{3}{5}mn\right)\left(-\frac{5}{3}m^4np\right)$

10.  $\left(\frac{7}{5}opq\right)\left(\frac{4}{5}o^4p^5q^6\right)$

11.  $(8r^5s^2)(3r^a t^2 s^b)$

12.  $\left(-\frac{4}{5}x^a y^b z\right)\left(\frac{3}{7}x^2 y z^3\right)$

13.  $\left(\frac{9}{5}mp^{2+x}\right)(-15m^{a+1}p)$

14.  $(0.5m^5p^5)(0.2m^2n)$

15.  $(0.4abc)(0.12xyz)$

16.  $(5a^m b^n c)(-2a^2 b^3 c)$

17.  $(-pq^r)(-5p^{3-x}q^2)$

18.  $(6m^{2x+8}n^{4x})(-2m^{x-6}n^5)$

19.  $(-mno)^2(mno)$

20.  $(-2n^4o)^3(-6n^3o^3)^2$

21.  $(-2a^5b^2)^2(3a^4bc^6)^2$

## **Multiplicación de un Monomio por un Polinomio**

Para efectuar esta operación se utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación que, como recordarás, postula lo siguiente:

$$(a) * (b + c + \dots + k) = ab + ac + ad + \dots ak$$

Ejemplo:

A)  $(3x^2)(2x^3 - 7x^2 - x + 6)$

Solución del producto.

$$\begin{aligned}(3x^2)(2x^3 - 7x^2 - x + 6) &= (3x^2)(2x^3) + (3x^2)(-7x^2) + (3x^2)(-x) + (3x^2)(6) \\ &= \mathbf{6x^5 - 21x^4 - 3x^3 + 18x^2}\end{aligned}$$

B)  $(2x^3)(2 - 7x^2 - y + 6xy)$

Solución del producto.

$$\begin{aligned}(2x^3)(2 - 7x^2 - y + 6xy) &= (2x^3)(2) + (2x^3)(-7x^2) + (2x^3)(-y) + (2x^3)(6xy) \\ &= \mathbf{4x^3 - 14x^5 - 2x^3y + 12x^4y}\end{aligned}$$

C)  $10 \left[ \frac{x+2}{5} + \frac{x+3}{10} \right]$

Solución del producto.

$$\begin{aligned}10 \left[ \frac{x+2}{5} + \frac{x+3}{10} \right] &= 10 \left( \frac{x+2}{5} \right) + 10 \left( \frac{x+3}{10} \right) \\ &= 2(x+2) + 1(x+3) \\ &= (2x + 4) + (x + 3) \\ &= \mathbf{3x + 7}\end{aligned}$$

**Actividad 7:***Realiza las siguientes multiplicaciones de monomios por polinomio.*

1. $7x^3(3x^5 + 4x^2 - 2x - 1)$	2. $(-8y^2)(7y + 5y^2 - 3xy - 2x^2)$	3. $(-4n)(2n + 6m - 5mn^2)$
4. $4y^2(y^3 - 3y^2 + y - 2)$	5. $m^4n(m^3 - 2mn^2 + 4m^2n - n^2 + 4)$	6. $(-3r)(5r - 8r^4 + 3rs^2)$
7. $-2a^3b(a^3 - 2a^2b^2 - 6ab^3)$	8. $7n^2(n^4 - 4n^3 - n^2 + 2n + 3)$	9. $-5xy^3(2x^3 - x^2y + 6)$
10. $-y^3(4y^2 - 6y - 8)$	11. $xy^4(xy - x^2y^2)$	12. $4b^2(5b^2 - 4b - c)$
13. $(-3a^x b^y)(-7a + 2b - 3abc)$	14. $(3a^{y+1} b^{x+1})(-3a + 2b^2 - abc)$	15. $\frac{2}{5}x^2\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{7}x^2y - \frac{3}{5}x^2y^3\right)$
16. $12\left[\frac{2x-1}{4} - \frac{x+3}{3} + \frac{x+1}{6}\right]$	17. $16\left[\frac{n-3}{8} - \frac{n+2}{4}\right]$	18. $9\left[\frac{s+3x}{3} + (s-1) - \frac{s+3x}{9}\right]$

### Ejercicio 6:

Resuelve los siguientes productos.

1.  $(4a^2 - 7ab)(2a^3)$

2.  $(-3m)(5m^4 - 3m^3 + 6m - 3)$

3.  $(3x^3 - 7x^2 - 2x)(xy)$

4.  $(-3ab)(2a^2 - 7ab + 8b^2)$

5.  $(6a^3b^2 - 7a^2b^3 + 4ab^5)(4a^5b^2)$

6.  $(-5xy^2z)(7x^6y^2z - 3x^5y - 4xz)$

7.  $(5m^3n - 6m^3p - 2m^2)(6m^3p)$

8.  $(4a^3c - 8a^2b - 3b)(-5b^4c)$

9.  $(5s^6t - 3st^4 + 4st)(2s^{x+1})$

10.  $\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{5}b^2 - \frac{3}{7}ab\right)\left(\frac{2}{5}ab^2\right)$

11.  $\left(\frac{4}{3}x^3y\right)\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}y^2 + 6xy\right)$

12.  $\left(\frac{3}{5}u^5 - \frac{7}{3}u^4v^3 + \frac{8}{5}u^3v^5 - \frac{1}{8}w\right)\left(\frac{4}{3}uv^2w\right)$

13.  $(-2x^{a-2})(7x^5 - 5x^2 + 6x^a + 3)$

14.  $(-5x^{2m})(5x^{3m} - 2x^{m+1} - 2)$

15.  $(3a^{2x+1} - 7a^{2x}b^{4x+1} - 4a^xb^{3x})(2a^2b^x)$

## **Multiplicación de un polinomio por un polinomio.**

Consideremos los polígonos

$$(a + b) \text{ y } (x + y + z)$$

Para multiplicarlos, hagamos  $w = a + b$ ; luego

$$(a + b)(x + y + z) = w(x + y + z)$$

Aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación resulta:

$$\begin{aligned} w(x + y + z) &= wx + wy + wz \\ &= (a + b)x + (a + b)y + (a + b)z \\ &= ax + bx + ay + by + az + bz \\ &= ax + ay + az + bx + by + bz \end{aligned}$$

Observa que cada término del primer polinomio se ha multiplicado por cada uno de los términos del segundo polinomio. Obviamente, de acuerdo con la propiedad distributiva de la multiplicación, también se puede proceder multiplicando cada término del segundo polinomio por los términos del primero.

Ejemplo:

A) multiplica los siguientes polinomios

$$(7x - 5)(4x^3 - 5x^2 - 2x + 3)$$

Solución:

$$\begin{aligned} (7x - 5)(4x^3 - 5x^2 - 2x + 3) &= (7x)(4x^3 - 5x^2 - 2x + 3) - (5)(4x^3 - 5x^2 - 2x + 3) \\ &= 28x^4 - 35x^3 - 14x^2 + 21x - 20x^3 + 25x^2 + 10x - 15 \\ &= \mathbf{28x^4 - 55x^3 + 11x^2 + 31x - 15} \end{aligned}$$

Otra forma de realizar esta operación es organizar los factores y escribir en dos renglones lo que resulta del producto, posteriormente realizar la reducción de términos semejantes de los polinomios resultantes, similar a realizar una multiplicación en aritmética.

Ejemplo:

B) multiplica los siguientes polinomios

$$(2x - 5)(4x^3 - 5x^2 + 2x - 3)$$

Solución:

$$\begin{array}{r} (4x^3 - 5x^2 + 2x - 3) \\ \underline{\hspace{1.5cm} (2x - 5)} \\ -20x^3 + 25x^2 - 10x + 15 \\ \underline{8x^4 - 10x^3 + 4x^2 - 6x} \\ \mathbf{8x^4 - 30x^3 + 29x^2 - 16x + 15} \end{array}$$

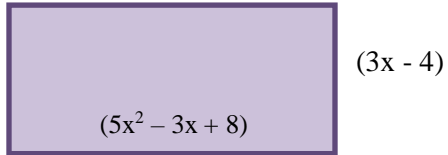
**Actividad 8:**

Realiza las siguientes multiplicaciones de polinomio por polinomio.

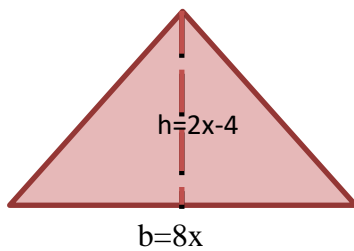
1. $(x^2 - 3x + 4)(3x - 3)$	2. $(4x - 1)(9x - 4)$	3. $(-4n + 2n)(6m - 5n^2)$
4. $(a+b)(a-b)$	5. $(5x - 2)(6x^2 - 3x + 2)$	6. $(-3 + 8r^4)(5r - 3r^2 + 3r^4)$
7. $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$	8. $(x+3)(x^2 - 3x + 9)$	9. $(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$
10. $(-y^3+5)(4y^2 - 6y - 8)$	11. $(3m-1)(2m^2 - 7m - 3)$	12. $(5y^2 - 3y - 2)(-7y + 3)$

Resuelve los siguientes problemas usando la multiplicación de polinomio por polinomio.

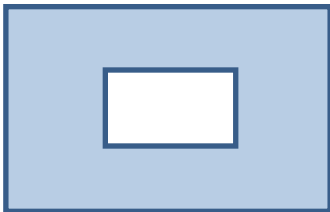
1. Calcula la expresión polinomial del área del rectángulo siguiente:



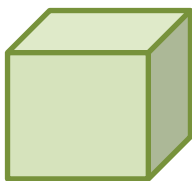
2. Calcula la expresión polinomial del área del triángulo siguiente:



3. Determina la expresión polinomial para el área de la región sombreada



4. Determina el volumen del cubo de la figura



### Ejercicio 7:

Efectúa los siguientes productos:

1.  $(x - 7)(x + 2)$
2.  $(m + 9)(m - 8)$
3.  $(-x + 2)(3 - x)$
4.  $(3x - 7)(x - 4)$
5.  $(2x - 5)(3x + 2)$
6.  $(5x - 4y)(5x + 4y)$
7.  $(3x + 2y)(3x - y)$
8.  $(n^2 + 4)(n^2 - 7)$
9.  $(\frac{1}{2}x - 3)(x + \frac{4}{3})$
10.  $(\frac{5}{3}x - \frac{1}{2}y)(\frac{2}{3}x - 3y)$
11.  $(\frac{3}{2}y - \frac{1}{3}x)(-\frac{4}{5}x - \frac{1}{2}y)$
12.  $(x^2 - 2xy + y^2)(x - y)$
13.  $(x^2 + 2xy + y^2)(x + y)$
14.  $(m^2 - mn + n^2)(m + n)$
15.  $(m^2 + mn + n^2)(m - n)$
16.  $(5x^2 - 7y^2 - 4xy)(3x - 2y)$
17.  $(4b^2 - 9a^2 - 4ab)(3a - 7b)$
18.  $(2a^3 - 3a + 4)(2a - 1)$
19.  $(5x^4 - 3x^2 - 6)(3x - 4)$
20.  $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 1)$

### Producto Notables

Al multiplicar algunos tipos de expresiones algebraicas se obtienen productos en que se distinguen algunos rasgos notables, los cuales nos permiten efectuar esta operación (la multiplicación) en forma rápida al aplicar la regla correspondiente.

#### Producto de dos binomios conjugados.

Si se tiene el binomio  $x + y$ , entonces  $x - y$  es su conjugado y viceversa. Para multiplicar dos binomios conjugados se aplica la regla siguiente.

- *El producto de un binomio por su conjugado es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo.*

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 \text{ (Diferencia de Cuadrados)}$$



#### Ejemplo.

$$(y - 6)(y + 6) = y^2 - 36$$

**Actividad 9:***Desarrolla los siguientes binomios conjugados*

1. $(x - 5)(x + 5)$	2. $(2x + y)(2x - y)$	3. $(5u + 4y)(5u - 4y)$
4. $(7a - 2b)(2b + 7a)$	5. $(-4m + 4n)(4m + 4n)$	6. $(3x - 2)(2 + 3x)$
7. $(q + \sqrt{2})(q - \sqrt{2})$	8. $(\frac{7}{3}a - b)(\frac{7}{3}a + b)$	9. $(5x + 10y)(5x - 10y)$
10. $(-7a^2 + 2)(7a^2 + 2)$	11. $(ab + \frac{9}{2})(-\frac{9}{2} + ab)$	12. $(ac + \frac{3}{5})(ac - \frac{3}{5})$
13. $(a^2b + \frac{8}{3})(a^2b - \frac{8}{3})$	14. $(4m - 9n)(4m + 9n)$	15. $(-8 + 3p^3)(8 + 3p^3)$
16. $(6x^5 - 8)(8 + 6x^5)$	17. $(4c^2 + b)(4c^2 - b)$	18. $(h^2 - 5)(h^2 + 5)$

### Ejercicio 8:

Desarrolla los siguientes productos:

- |  |  |                                 |
|--|--|---------------------------------|
| 1. $(x - 3)(x + 3)$  | 2. $(r + 1)(r - 1)$  | 3. $(a - 2)(a + 2)$             |
| 4. $(k + 8)(k - 8)$  | 5. $(-y + 5)(y + 5)$   | 6. $(a + 9)(-a + 9)$            |
| 7. $(o + p)(o - p)$  | 8. $(m - n)(m + n)$  | 9. $(xy - z)(xy + z)$           |
| 10. $(9f^3 - 1)(9f^3 + 1)$                                     | 11. $(-2k^2 + 9)(2k^2 + 9)$                                    | 12. $(3e^2 - 5a)(5a + 3e^2)$    |
| 13. $(3x + 5y)(5y - 3x)$                                       | 14. $(4m - 9n)(9n + 4m)$                                       | 15. $(2b + 3c)(3c - 2b)$        |
| 16. $(3m^3 - 9)(3m^3 + 9)$                                     | 17. $(m + n)(m - o)$   | 18. $(5x^4y + 4z)(-4z + 5x^4y)$ |
| 19. $(\frac{3}{5}a + \frac{1}{2})(\frac{3}{5}a - \frac{1}{2})$ | 20. $(\frac{7}{6}x - \frac{3}{2})(\frac{7}{6}x + \frac{3}{2})$ |                                 |

### Cuadrado de un Binomio.

En este caso se tiene lo siguiente.

- *El producto de un binomio al cuadrado es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término, es decir.*

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \text{ (Trinomio Cuadrado Perfecto)}$$

Caso particular en que el número o literal tenga signo negativo

$$(x - y)^2 = x^2 + 2(x)(-y) + (-y)^2$$

### Ejemplo:

$$(n + 6)^2 = (n)^2 + 2(6)(n) + 6^2 = n^2 + 12n + 36$$

$$(8a - 3b)^2 = (8a)^2 + 2(8a)(-3b) + (-3b)^2 = 64a^2 - 48ab + 9b^2$$

**Actividad 10:***Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado*

1. $(x + 4)(x + 4)$	2. $(\frac{3}{4}x + 2)^2$	3. $(p - 5r)(p - 5r)$
4. $(a - 2b)^2$	5. $(5x^2 + 3)^2$	6. $(6a^2 - b)(6a^2 - b)$
7. $(x^3 - 3y^a)^2$	8. $(k^2 - \frac{5}{2})^2$	9. $(\frac{5}{3} - m^3)^2$
10. $(3a^3 + b^2)^2$	11. $(5s - 2)^2$	12. $(5r^2 - 3s)^2$
13. $(5x - 10y)(5x - 10y)$	14. $(9 - 3y^3)^2$	15. $(x^a + y^b)^2$
16. $(3x^2 - \frac{1}{2})^2$	17. $(7m^9 + 6)^2$	18. $(x^5 - 3ay^2)^2$

**Ejercicio 9:**

Resuelve los siguientes binomios al cuadrado:

1.  $(x + 8)(x + 8)$

2.  $(m - 10)^2$

3.  $(a - 2)(a - 2)$

4.  $(y + \frac{1}{4})^2$

5.  $(y + \frac{1}{3})^2$

6.  $(p - 6)(-6 + p)$

7.  $(\frac{1}{2} - b)^2$

8.  $(-5 + x)^2$

9.  $(\frac{4}{3} + n)^2$

10.  $(\frac{5}{4} - s)^2$

11.  $(t + 9)^2$

12.  $(m + 12)(12 + m)$

13.  $(r + 15)^2$

14.  $(k + 15)^2$

15.  $(\frac{5}{4}s - \frac{1}{3})(-\frac{1}{3} + \frac{5}{4}s)$

16.  $(3bc - \frac{5}{2})^2$

17.  $(ab + 8n)^2$

18.  $(7m - 3n)^2$

19.  $(6x^2 - 8y^2)^2$

20.  $(-6 + a)^2$

**Ejercicio:** Relaciona las dos columnas.

<input checked="" type="checkbox"/> (g) $(2a + 5b)^2$	a) $36a^2 - 60ab + 25b^2$
<input type="checkbox"/> ( ) $(3a + 4b)^2$	b) $\frac{25}{36}a^2 + \frac{5}{7}ab + \frac{9}{49}b^2$
<input type="checkbox"/> ( ) $(5a - 7b)^2$	c) $9a^2 + 24ab + 16b^2$
<input type="checkbox"/> ( ) $(6a - 5b)^2$	d) $49 + 70a + 25a^2$
<input type="checkbox"/> ( ) $(-8a + 9b)^2$	e) $64a^2 - 144ab + 81b^2$
<input type="checkbox"/> ( ) $(1.2a - 4b)^2$	f) $10.24a^2 - 28.8ab + 20.25b^2$
<input type="checkbox"/> ( ) $(7 + 5a)^2$	g) $4a^2 + 20ab + 25b^2$
<input type="checkbox"/> ( ) $(a - 3b)^2$	h) $a^2 - 6ab + 9b^2$
<input type="checkbox"/> ( ) $(3.2a - 4.5b)^2$	i) $1.44a^2 - 9.6ab + 16b^2$
<input type="checkbox"/> ( ) $(\frac{5}{6}a + \frac{3}{7}b)^2$	j) $25a^2 - 70ab + 49b^2$

Encuentra en la sopa de polinomios los binomios elevados al cuadrado.

$$(3x - 2y)^2, (x + y)^2, (3x - 2)^2, (4x + 2y)^2, (x - y)^2, (2x - y)^2$$

$$(2x + y)^2, (5x^2y - 3x^2)^2, (4xy^3 - 2xy)^2, (x^3y^2 - xy^3)^2, (4x^4 - 6y^3)^2,$$

$$(5x - 2y)^2, (4x^2 - 2x^3)^2, (2x^2 - 3x^3)^2, (5x^2 + 2y)^2, (y^2 - 2x)^2,$$

$$(y^2 + x)^2, (y^2 - x)^2$$

$9x^2$	$-12xy$	$4y^2$	$12xy$	$-4x^2y^2$	$16x^8$	$x^2$	$y^4$	$-y^2$	$2xy$	$4x^4$
$-12x$	$8x^2y^6$	$16x^2y^6$	$-16x^2y^4$	$4x^2y^2$	$-48x^4y^3$	$-y^2$	$-2xy^2$	$y^2$	$-2xy$	$x^2$
4	5	$12x^2y^6$	$4x^4$	$12x^5$	$36y^6$	$-36y^6$	$x^2$	$6xy^2$	$8xy^3$	$2xy$
$16x^2$	$25x^2$	$-20xy$	$4y^2$	$-12x^5$	$36y^3$	$-9x^6$	$-6xy^2$	$-8xy^3$	$10x^2$	$y^2$
$x^6y^4$	$4x^3y^5$	$2x^2y^2$	$16x^2$	$-16x^2$	$9x^6$	$-18x^6$	$25x^4$	$24xy$	$-4xy$	$24xy$
$x^2y^6$	$-2x^4y^5$	$-x^2y^6$	$16x$	$16xy$	$8x^2$	$20x^2y$	$25x^2$	$4x^2$	$4x^2$	$y^4$
$16x^2$	$-4xy$	$x^2y^6$	$4x^2$	$-2xy$	$4y^2$	$-4xy$	$y^4$	$4xy$	$-2xy$	$-4xy^2$
$9y^2$	$36y^3$	$4x^2$	$-4xy$	$-2xy$	$-36y^6$	$4x^2$	$-36y^6$	$y^2$	$36y$	$4x^2$
$-12xy$	$-12xy$	$36y$	$25x^4y^2$	$-30x^4y$	$9x^4$	$36xy$	$36x$	4	$-4x$	$x^2$
$4x^2$	$-36y^6$	$16x^4$	$-16x^5$	$4x^6$	$4x^2$	$y^4$	$2xy^2$	$x^2$	$25xy$	$25x$

### Binomio con término común

En este producto notable se tiene lo siguiente:

- *Al cuadrado del término común.*
- *El producto del término común por la suma de los términos no comunes.*
- *El producto de los términos no comunes.*

$$(x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab$$

**Ejemplo:**

$$(x + 9)(x + 3) = x^2 + x(9 + 3) + (9)(3)$$

$$= x^2 + 12x + 27$$

$$(y + 7)(y - 3) = y^2 + y(7 + (-3)) + (7)(-3)$$

$$= y^2 + 4y - 21$$

### Actividad 11:

*Desarrolla los siguientes binomios con término común:*

1. $(x - 2)(x + 1)$	2. $(m + 3)(m - 2)$	3. $(r + 7)(r - 4)$
4. $(k - 10)(k - 2)$	5. $(b - 6)(b - 5)$	6. $(2a - 6)(2a + 4)$
7. $(z - 3)(z - 4)$	8. $(x + 4)(x + 6)$	9. $(4n - 5)(4n - 2)$
10. $(x^2 - 10)(x^2 + 5)$	11. $(n^3 - 4)(n^3 - 8)$	12. $(pq^2 + 7)(pq^2 - 9)$

### Ejercicio 10:

Resuelve los productos siguientes:

1.  $(a - 8)(a + 5)$

2.  $(s + 7)(s - 4)$

3.  $(b - 10)(b - 2)$

4.  $(x - 6)(x - 5)$

5.  $(r + 4)(r + 6)$

6.  $(n - 3)(n + 4)$

7.  $(m - 1)(m - 8)$

8.  $(b - 9)(b + 3)$

9.  $(x + 2)(x - 5)$

10.  $(p + 8)(p - 3)$

11.  $(2n - 6)(2n + 4)$

12.  $(3m + 6)(3m - 4)$

13.  $(6x - 4)(6x + 3)$

14.  $(x^4 + 6)(x^4 - 12)$

15.  $(q^5 - 1)(q^5 + 2)$

16.  $(a^3 - 5)(a^3 - 2)$

17.  $(m^x + 7)(m^x - 5)$

18.  $(a^2b^3 + 4)(a^2b^3 + 2)$

19.  $(3x^m + 4)(3x^m - 7)$

20.  $(a^2x^3 + y^4)(a^2x^3 + 3)$

### Cubo de un binomio

En este producto notable se tiene lo siguiente:

- *El cubo del primer término.*
- *El triple producto del cuadrado del primer término por el segundo.*
- *El triple producto del primer término por el cuadrado del segundo.*
- *El cubo del segundo término.*

$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= (x)^3 + 3(x)^2(y) + 3(x)(y)^2 + (y)^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \end{aligned}$$

El caso en el que el número literal  $y$  tenga signo negativo

$$\begin{aligned} (x - y)^3 &= (x)^3 + 3(x)^2(-y) + 3(x)(-y)^2 + (-y)^3 \\ &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \end{aligned}$$

**Ejemplo:**

$$\begin{aligned}(x + 4)^3 &= (x)^3 + 3(x)^2(4) + 3(x)(4)^2 + (4)^3 \\ &= x^3 + 12x^2 + 48x + 64\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5b - 3)^3 &= (5b)^3 + 3(5b)^2(-3) + 3(5b)(-3)^2 + (-3)^3 \\ &= 125b^3 - 225b^2 + 135b - 27\end{aligned}$$

**Actividad 12:**

*Desarrolla los siguientes binomios al cubo:*

1. $(x - 2)^3$	2. $(m - 3)^3$	3. $(r + 7)(7 + r)(r + 7)$
4. $(k - 10)^3$	5. $(b - 6)^3$	6. $(2a + 4)^3$
7. $(z - 3)(z - 3)(z - 3)$	8. $(x + \frac{1}{3})^3$	9. $(2n - \frac{1}{2})^3$
10. $(x^2 - 5)^3$	11. $(n^3 - \frac{1}{4})^3$	12. $(pq^2 + 7)^3$

**Ejercicio 11:**

Desarrolla los siguientes binomios al cubo:

1.  $(x - 1)^3$

2.  $(p + 6)^3$

3.  $(m - 2)^3$

4.  $(b + 10)^3$

5.  $(k - \frac{1}{3})^3$

6.  $(\frac{1}{2} - x)^3$

7.  $(1 - x)^3$

8.  $(10 - c^2)^3$

9.  $(2f + 1)^3$

10.  $(3n - 4)^3$

11.  $(2s + 3)^3$

12.  $(2n - \frac{1}{5})^3$

13.  $(1 - 4y)^3$

14.  $(5a^2 + 2b^5)^3$

15.  $(3x - 4y)^3$

16.  $(3a^3b - 2c^4)^3$

17.  $(4x^2 + 2xy)^3$

18.  $(a - \frac{1}{3}b)^3$

Escribe el valor que representa cada letra, completa la frase oculta

$(x + 1)(x + 2) = Ax^2 + Cx + B$

$(x + 3)(x + 7) = x^2 + Mx + 21$

$(x + 4)(x + 2) = x^2 + Gx + J$

$(x + 1)(x + 14) = x^2 + Sx + R$

$(x + 4)(x + 3) = x^2 + Ix + O$

$(x + 5)(x + 6) = x^2 + Nx + 30$

$(x + 6)(x + 7) = x^2 + Px + 42$

$(x + 10)(x + 6) = x^2 + Tx + 60$

$(x + 3)(x + 6) = x^2 + Lx + 18$

$(x + 1)(x + 17) = x^2 + Vx + U$

$(x + 1)(x + 3) = x^2 + Dx + 3$

$(x + 2)(x + 17) = x^2 + Zx + 34$

$(x + 2)(x + 3) = x^2 + Ex + 6$

13 17 5 4 12      1 6 7 9 7 19 1 14      10 7

16 14 1 2 1 8 12      15 7      1 13 14 5 11 4 12

10 5 16 12 4 12 15      1 2 14 5 18 7 1 4 12 15

## División de Polinomio

A continuación, se muestra la regla de los signos de esta operación:

### Regla de los signos:

$$(+) \div (+) = + \quad (+) \div (-) = - \quad (-) \div (+) = - \quad (-) \div (-) = +$$

### Ley de los exponentes para la división

En la división los exponentes de las bases iguales se restan:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ (Importante)}$$

### División de un monomio entre un monomio

Para dividir un monomio entre un monomio se siguen estos pasos:

1. Se dividen los coeficientes numéricos.
2. Se aplica la ley de los exponentes  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

### Ejemplo.

Efectuar la siguiente división entre monomio.

$$A) \frac{8a^{15}}{2a^{10}} = \frac{8}{2} a^{15-10} = 4a^5$$

**Nota:  $x^0 = 1$  para todo  $x \neq 0$  (importante)**

**Actividad 13:***Desarrolla las siguientes operaciones:*

1. $(-8x^4) \div (-4x^3)$	2. $(-18x^4) : (6x^3)$	3. $\frac{14a^7}{2a^2}$
4. $\frac{5a^7b^3}{a^2b}$	5. $\frac{-12a^6b^4c^6}{3a^2b^2c}$	6. $(6x^3) \div (4x^2)$
7. $\frac{14x^4y^7}{6x^5y^4}$	8. $\frac{15p^5}{60p^6}$	9. $(-x^6y^5) \div (-6x^5y^4)$
10. $-25a^2b^3$ entre $5ab$		

Completa los elementos faltantes, para que sean correctas las operaciones:

$$1. \frac{r^{12}}{\square^3} = r^9$$

$$2. \frac{z^{15}}{\square} = z^4$$

$$3. \frac{7n^3}{\square} = \frac{7}{n^2}$$

$$4. \frac{\square}{9y^8} = 10y^3$$

$$5. \frac{12x^5y^8}{\square} = \frac{6y^2}{5x}$$

$$6. \frac{-3m^2n^8}{\square} = \frac{m}{n}$$

### Ejercicio 12:

Realiza las siguientes divisiones de monomio.

$$1. \frac{9a^6 b^{10}}{3a^2 b^5}$$

$$2. \frac{42x^9 y^2}{-7x^5 y^2}$$

$$3. \frac{-26a^5 b^6}{13b^3}$$

$$4. \frac{32m^5 n^6}{-8m^3 b^5}$$

$$5. \frac{36a^2 b^8}{-12a^{10} b^7}$$

$$6. \frac{-25p^{12} q^9}{-5p^6 q^5}$$

$$7. (-6x^8 y^9) \div (18x^4 y^7)$$

$$8. (-44m^5 n^8) \div (66m^3 n^2)$$

$$9. \frac{12o^3 p^2 q}{18o q^3}$$

$$10. 16x^5 y^3 \text{ entre } -3x^6 y^3$$

### División de un polinomio entre un monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio se aplica la propiedad distributiva de la división, es decir, se divide cada término del polinomio entre el monomio.

Ejemplo.

Efectuar la siguiente división.

$$A) \frac{15x^3 - 12x^2 + 6x}{3x}$$

Solución:

$$\frac{15x^3 - 12x^2 + 6x}{3x} = \frac{15x^3}{3x} - \frac{12x^2}{3x} + \frac{6x}{3x} = 5x^2 - 4x + 2$$

### Ejercicio13:

1.  $\frac{x^2 + 2x}{x}$

2.  $\frac{4x^3 + 2x^2}{2x^2}$

3.  $\frac{8x^2y - 20x^3}{4x^2}$

4.  $\frac{2x^3 - x^2 + x}{x}$

5.  $\frac{2x^4 + 6x^3 - 8x^2}{2x^2}$

6.  $\frac{8x^6 - 10x^4 - 12x^3}{-4x^2}$

7.  $\frac{27m^4n^6 - 15m^3n^6 + 3mn^2}{3mn^2}$

8.  $\frac{32a^7b^5 + 48a^6b^4 - a^4b^3}{8ab^3}$

9.  $\frac{28x^9y^6 - 49x^7y^3 - 7x^2y}{7x^2y}$

10.  $\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{5}{2}a\right) \div \frac{1}{2}a$

## Evaluación Diagnóstica

Analiza y resuelve correctamente cada una de las situaciones.

1. Resuelve las ecuaciones lineales siguientes

a)  $x + 10 = 15$

b)  $y - 6 = 12$

c)  $-4x = 20$

d)  $-3x = -12$

e)  $\frac{x}{5} = 7$

f)  $9x - 11 = 5x - 9$

2. Abigail y Roberto rompieron sus alcancías y tienen un total de \$342. Si Roberto tiene \$105 más que Abigail, ¿cuánto dinero tiene cada uno?

3. La edad de Rosa es el doble de la edad de Margarita y entre las dos tienen 48 años. ¿Cuántos años tiene Margarita?

4. Con base a la siguiente ecuación lineal  $y = 3x - 6$  completa la siguiente tabla.

<b>x</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b>y</b>					

5. Grafica la recta  $3x + 2y = 6$

## Unidad de Competencia II

### Ecuaciones, Sistemas de Ecuaciones Lineales y Factorización

#### Factorización.

Factorización significa expresar una expresión algebraica como factores; puede ser entendida como el proceso inverso al producto algebraico.

#### 1. Factorización de expresiones que tienen factor común (factor común monomio y polinomio).

##### Máximo Factor Común (M.F.C):

El término  $ax^n$ , es el M.F.C de un polinomio si:  $a$  es el máximo entero que divide cada uno de los coeficientes del polinomio, y  $n$  es el mínimo exponente de  $x$  en todos los términos del polinomio.

El Factor común monomio (F.C.M) es un término que es común a todos los términos de una expresión algebraica, generalmente se usa el Máximo Factor Común (M.F.C).

Por ejemplo, en la expresión  $4+8$  tenemos como factores comunes al 2 y al 4 pero solo el 4 es el máximo factor común.

$$2(2+4)$$

$$4(1+2)$$

Los pasos para realizar la factorización son:

- 1.- Encontrar el M.F.C de los coeficientes numéricos.
- 2.- Encontrar el M.F.C de las partes literales.
- 3.- El F.C.M es la unión de los resultados de los pasos 1 y 2.
- 4.-En el resultado de la factorización se escribe el F.C.M y luego entre paréntesis se escribe la expresión que resulta de dividir la expresión original entre el F.C.M.

*Ejercicio de Ejemplo resuelto por el docente*

*Factoriza  $30x^{10} - 50x^8 + 60yx^6$*

*Respuesta:  $10x^6 ( 3x^4 - 5x^2 + 6 )$*

**Ejercicio No. 1** Factoriza en dos factores.

1. $3a^3 - a^2 =$	6. $a^3 - a^2x + ax^2 =$
2. $x^3 - 4x^4$	7. $2a^2x + 2ax^2 - 3ax =$
3. $a^3 + a^2 + a =$	8. $25x^7 - 10x^5 + 15x^3 - 5x^2 =$
4. $4x^2 - 8x + 2 =$	9. $9a^2 - 12ab + 15a^3b^2 - 24ab^3 =$
5. $15y^3 + 20y^2 - 5y =$	10. $16x^3y^2 - 8x^2y - 24x^4y^2 - 40x^2y^3 =$

Ahora, el Factor común polinomio (F.C.P) es un polinomio (expresión de más de un término) que es común a una expresión algebraica.

Los pasos para realizar la factorización son los mismos que en el F.C.M, solo que en F.C.P consideramos un polinomio como factor común en lugar de un monomio.

*Ejercicio de Ejemplo resuelto por el docente:*

*Factoriza  $x(a+b) + m(a+b)$*

*Respuesta:  $(a+b)(x+m)$*

**Ejercicio No.2** Factoriza en dos factores.

1. $2x(n-1) - 3y(n-1)$	6. $(x+y)(n+1) - 3(n+1)=$
2. $a(n+2) + n + 2 =$	7. $(x+1)(x-2) + 3y(x-2)=$
3. $x(a+1) - a - 1=$	8. $(a+3)(a+1) - 4(a+1)=$
4. $4x(m-n) + n - m=$	9. $a(x-1) - (a+2)(x-1)=$
5. $x(2a+b+c) - 2a - b - c=$	10. $4x(x+1)^3 - (2x+1)(-x-1)=$

**2. Factorización de expresiones que tienen factor común al agrupar términos.**

En algunos casos en el polinomio que se busca factorizar no hay un factor común para todos sus términos, pero al agruparlos se puede determinar una expresión común para cada agrupación.

Por ejemplo, en el polinomio  $am + bm + an + bn$ , no hay un factor común, pero si se agrupan los términos es posible factorizarlos.

Factorizar:  $am + bm + an + bn$ ,

- Se forman dos grupos con el mismo número de términos.
- $(am + an)(bm + bn)$
- Se busca el factor común en cada grupo:  $a(m + n) + b(m + n)$ .
- Se factoriza el binomio común:  $(m + n)(a + b)$

**Ejercicio No.1** Factoriza en dos factores.

1. $x+x^2-xy^2-y^2$	6. $3x^3-9ax^2-x+3a$
2. $3abx^2-2y^2-2x^2+3aby^2$	7. $6ax+3a+1+2x$
3. $3a-b^2+2b^2x-6ax$	8. $1+a+3ab+3b$
4. $3a^3-3a^2b+9ab^2-a^2+ab-3b^2$	9. $a^3+a^2+a+1$
5. $3x^3+2axy+2ay^2-3xy^2-2ax^2-3x^2y$	10. $3-x^2+2abx^2-6ab$

**3. Factorización de una diferencia de cuadrados.**

Para una Diferencia de Cuadrados, los dos términos que lo forman tienen raíces cuadradas exactas, al factorizar se forman los Binomios Conjugados.

Recuerda el modelo matemático para el producto notable de dos binomios conjugados del que se obtiene la fórmula:

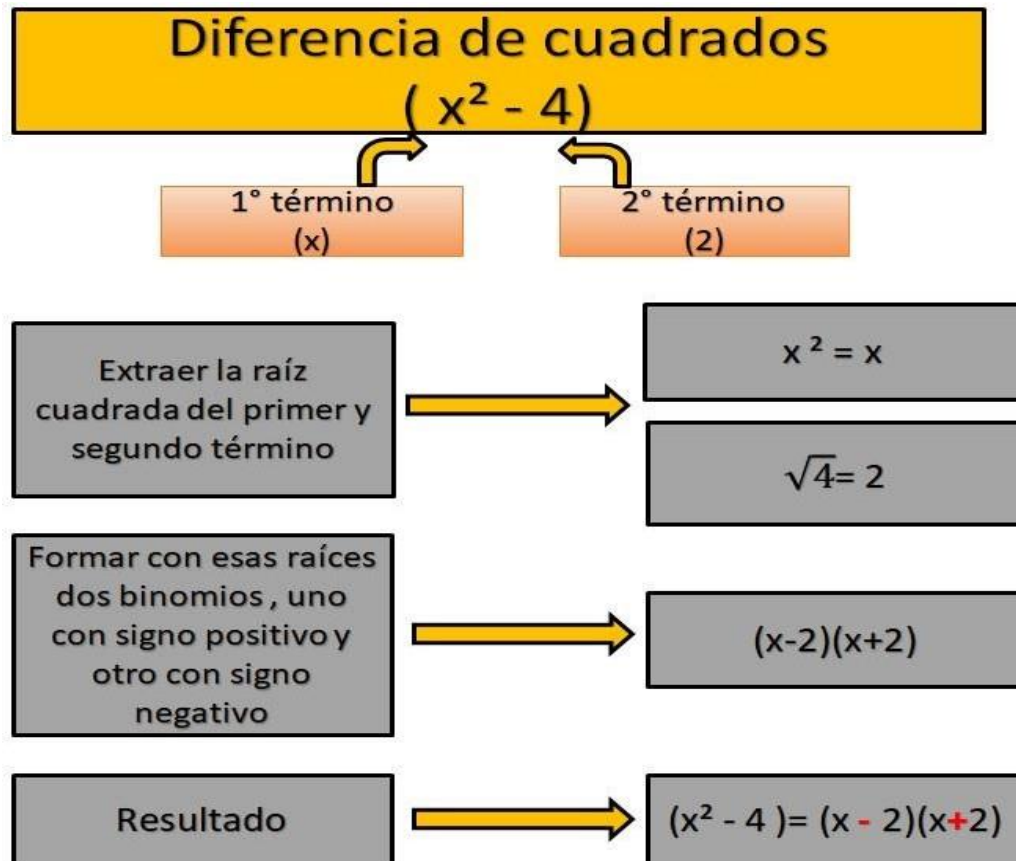
$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

Ésta nos proporciona una diferencia de cuadrados.

Aplicando la propiedad de identidad, se puede observar que una diferencia de cuadrados también se representa como un producto de dos binomios conjugados:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

**Nota:** Nuevamente se aprecia que la factorización es una operación inversa a la del desarrollo de un producto notable.



**Diferencias de cuadrados con coeficientes enteros.**

$$9a^4 - 25b^6 =$$

- Se extrae raíz cuadrada de ambos términos para representar la diferencia de cuadrados según el modelo:

$$9a^4 - 25b^6 = [3a^2]^2 - [5b^3]^2$$

- Con estas raíces se escribe el producto de binomios conjugados.

$$(3a^2 + 5b^3)(3a^2 - 5b^3)$$

**Diferencia de cuadrados con coeficientes racionales.**

$$\frac{y^2}{9} - \frac{25x^4}{64} = \left(\frac{y}{3} + \frac{5x^2}{8}\right)\left(\frac{y}{3} - \frac{5x^2}{8}\right)$$

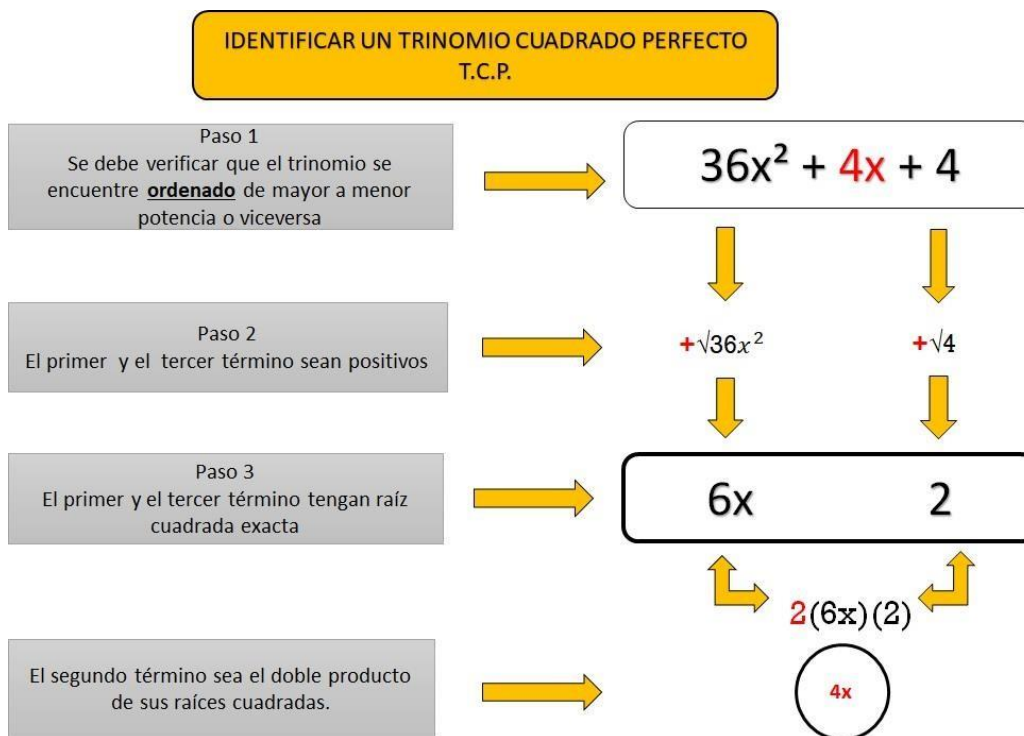
**Ejercicio No.1** Factoriza en dos factores

1. $x^2 - 49$	16. $x^2 - 9/100$
2. $81 - x^2$	17. $a^2 - 36/49$
3.	18. $x^6 - 4$
4. $x^4 - 64$	19. $y^4 - 1/4$
5. $100 - 16x^2$	20. $81/16 - a^{10}$
6.	21. $x^8 - 9/100$
7. $x^2 - 4$	22. $-x^2 + 4$
8. $a^4 - 64$	23. $-16 + x^2$
9. $49 - b^6$	24. $-4/9 + a^6$
10. $x^8 - 4$	25. $-81 + y^4$
11. $x^2 - y^2$	26. $36x^2 - a^6b^4$
12. $b^2 - 1$	27. $x^2y^4 - 1/4a^2$
13. $x^2 - 9/25$	28. $49x^8 - 9/100 y^6z^2$
14. $y^2 - 1/4$	29. $a^4b^{10} - 144x^6$
15. $81/16 - a^2$	30. $0.25a^4b^6 - x^2y^8$

#### 4. Factorización de trinomios cuadráticos (Trinomios cuadrados perfectos, Trinomios de la forma $x^2+bx+c$ y Trinomios de la forma $ax^2+bx+c$ ).

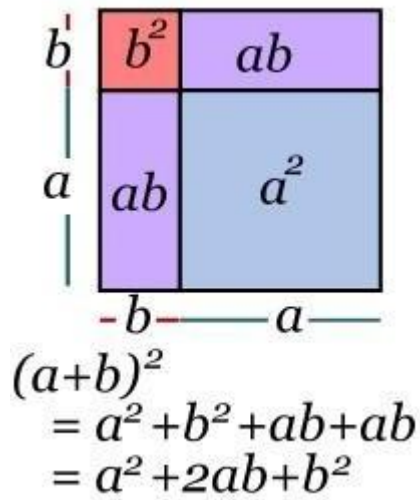
##### T.C.P. (Trinomio Cuadrado Perfecto)

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto deben estar ordenados los términos respecto a los exponentes de mayor a menor o inversamente y posteriormente es necesario:



**Resultado de la factorización:**  $36x^2+4x+4 = (6x+2)(6x+2)$  o  $(6x+2)^2$

Visualización de la fórmula para un binomio al cuadrado y para su trinomio cuadrado perfecto.



**Ejercicio 1. Identificar si son trinomios cuadrados perfectos**

1. $144m^2 - 72mp + 9p^2$	
2. $125x^2 + 40xy + 16y^2$	
3. $25a^2 + 24ab + 4b^2$	
4. $121f^2 - 22fg + g^2$	
5. $4x^2 + 40xy + 100y^2$	
6. $64x^2 - 40xy + 16y^2$	
7. $49a^2 + 42ab + 4b^2$	
8. $4 - x^2 - 4x$	

**Ejercicio No.2 Factoriza en dos factores**

1. $x^2 - 2x + 1$	2. $x^2 + 6x + 9$
3. $x^2 - 6x + 9$	4. $x^2 - 2x + 1$
5. $x^2 - 20x + 100$	6. $x^2 + 2x + 1$
7. $x^2 + 10x + 25$	8. $x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}$
9. $x^2 + 14x + 49$	10. $x^2 - 10x + 25$
11. $4 - 4x + x^2$	12. $x + x^2 + \frac{1}{4}$
13. $4x^2 + 12x + 9$	14. $9x^2 + 30x + 25$
15. $x^2y^2 + 8xy + 16$	16. $x^6 + 10x^3 + 25$
17. $25m^2 - 10mn + n^2$	18. $4x^2 + 4xa^3 + a^6$
19. $m^2n^2 + 10mn + 25$	20. $25x^6 + 10x^5 + x^4$
21. $36x^2 - 72x + 81$	22. $\frac{1}{4}b^6 + x4a^2 - x^2ab^3$

23. $9m^2 + 12mn + 4n^2$	24. $-x^2 + 6x - 9$
25. $m^2 + 4mn + 4n^2$	26. $a^2 + 14a + 49$
27. $9x^4 - 30x^3y + 25xy^2$	28. $x^4 + 16x^2y^4 + 64y^8$
29. $16m^8 - 64m^5n - 64m^2n^2$	30. $a^4x^4 + a^8x^4 + 4a^6x^6$
31. $49a^2 + 14a + 1$	32. $9x^2 + 30x + 25$

## Factorización de trinomios de la forma $x^2+bx+c$

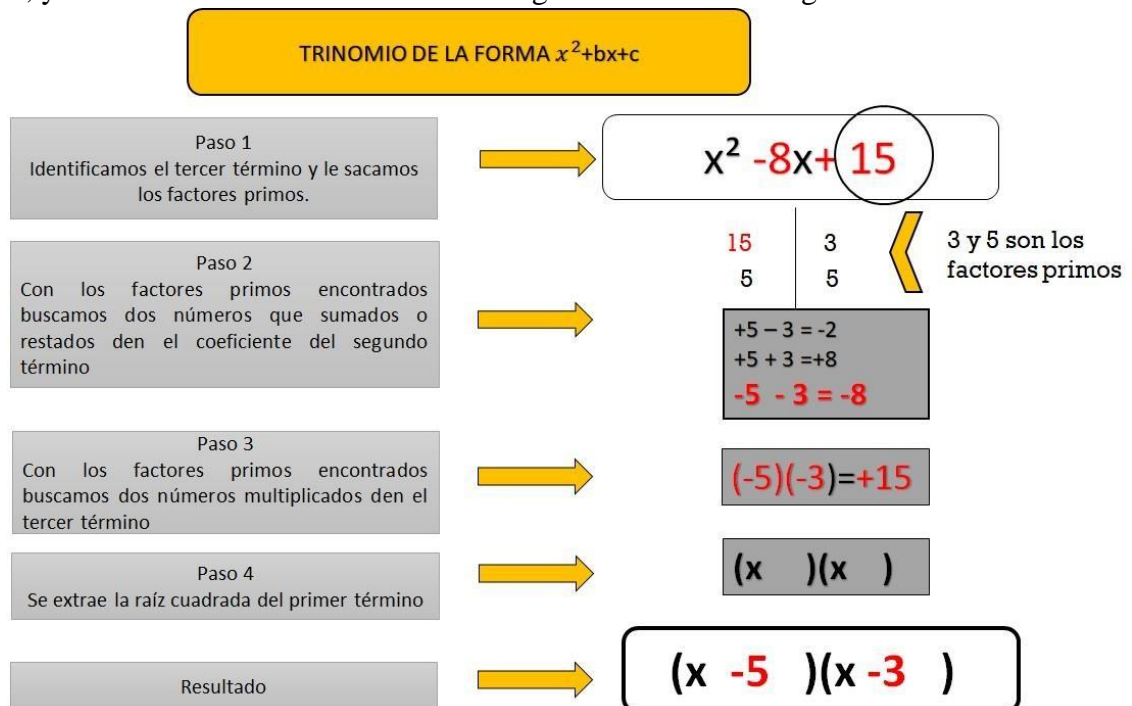
### Regla para conocer un trinomio de la forma $x^2+bx+c$ :

- Tienen un término positivo elevado al cuadrado y con coeficiente 1 (El 1 no se escribe, y así lo diferenciamos del T.C.P.).
- No siempre el tercer término, se le podrá sacar la raíz cuadrada (Es otra razón para diferenciarlo del T.C.P.).
- Se descompone el trinomio en dos factores binomios cuyo primer término será la raíz cuadrada del término  $x^2$ .

El signo del primer binomio será el mismo signo que tenga el término “bx”, el signo del segundo binomio será igual a la multiplicación de los signos de “bx” y de “c”.

Si los dos factores tienen signos iguales entonces se buscan dos números cuya suma sea igual que el valor absoluto del factor “b” de “bx”, y cuyo producto sea igual al valor absoluto del factor “c”, estos números son los segundos términos de los factores binomios.

Si los dos factores tienen signos diferentes entonces se buscan dos números cuya diferencia sea igual que el valor absoluto del factor “b” de “bx”, y cuyo producto sea igual al valor absoluto del factor “c”, el mayor de estos números será el segundo término del primer factor binomio, y el menor de estos números será el segundo término del segundo factor binomio.



Ejemplo explicativo:

Factorizar  $m^2 + 8m + 15$

1<sup>er</sup> paso  $(m \quad )(m \quad )$

2<sup>o</sup> paso  $(m + \quad )(m + \quad )$

3<sup>er</sup>o4<sup>o</sup> paso  $(m + 3)(m + 5)$

$x^2 + 10x + 24 = (x + 6)(x + 4)$

$a^2 - 2a - 24 = (a - 6)(a + 4)$

$a^2m^4 + am^2 - 380 = (am^2 + 20)(am^2 - 19)$

$x^6 - 21x^3m + 98m^2 = (x^3 - 7m)(x^3 - 14m)$

**Ejercicio No.1 Factoriza en dos factores**

1. $x^2 + 5x + 6$	2. $x^2 - x - 6$
3. $x^2 - 11x + 24$	4. $x^2 - 9x + 8$
5. $x^2 + x - 20$	6. $x^2 + 5x + 6$
7. $x^2 - 6x - 27$	8. $x^2 + 6x + 5$
9. $x^2 + 3x - 10$	10. $x^2 + 2x + 1$
11. $x^2 - 13x - 30$	12. $x^2 + 10x + 16$
13. $x^2 + 5x + 6$	14. $x^2 + 8x + 16$
15. $a^2 - 2a - 15$	16. $x^2 - 5x - 14$
17. $n^2 - 6n - 40$	18. $x^2 - 11x - 42$

19. $x^2 - 8x + 15$	20. $x^2 - 2x - 63$
21. $c^2 + 5c - 24$	22. $x^2 - 10x + 25$
23. $c^2 + 5c - 24$	24. $x^2 - x - 72$
25. $x^2 + 7x + 10$	26. $x^2 + 8x + 15$
27. $x^2 + 4x - 21$	28. $n^2 + n - 20$
29. $x^2 + 5x + 6$	30. $x^2 - x - 6$
31. $x^2 - 11x + 24$	32. $x^2 - 9x + 8$
33. $x^2 + 4x + 3$	34. $x^2 + 5x + 6$
35. $x^2 - 6x - 40$	36. $y^2 - 6y - 72$
37. $m^2 - 12m + 27$	38. $x^2 - 25x + 100$
39. $x^2 - 2x - 24$	40. $y^2 + 16y - 80$
41. $x^2 + 20x + 75$	42. $m^2 - 11m - 12$

## Factorización de trinomios de la forma $ax^2+bx+c$

Los trinomios de esta forma presentan las siguientes características:

- El coeficiente del primer término es diferente de 1.
- La variable del segundo término es la misma que la del primer término, pero con exponente a la mitad.
- El tercer término es independiente de la letra que aparece en el primer y segundo términos del trinomio.

Para factorizar trinomios de la forma  $ax^2 + bx + c$ , existen varias formas, a continuación, se describirá dos de ellas:

<b>TRINOMIO DE LA FORMA <math>ax^2+bx+c</math></b>	$6x^2 - 7x - 3$	
Se multiplica el coeficiente del primer término "6" por todo el trinomio, dejando indicado el productos del 2do término 6 por 7x	$\longrightarrow$	$6(6x^2 - 7x + 3) = 36x^2 - 6(7x) - 18$
Se ordena tomando en cuenta que $36x^2 = (6x)^2$ y $6(-7x) = -7(6x)$ , escribiéndolo de la siguiente manera	$\longrightarrow$	$36x^2 \text{ y } 6(-7x) = (6x)^2 - 7(6x) - 18$
Luego se procede a factorizar $(6x)^2 - 7(6x) - 18$ como un problema del Caso $x^2+bx+c$ . Se buscan dos números cuya diferencia sea -7 y cuyo producto sea -18	$\longrightarrow$	$(6x \quad )(6x \quad )$ $(-9)(+2)=-18$ $(6x - 9 \quad )(6x + 2 \quad )$
Como al principio multiplicamos el trinomio por "6", entonces ahora los factores binomios encontrados, los dividimos entre "6".	$\longrightarrow$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math>\frac{(6x - 9)(6x + 2)}{6}</math> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math>\frac{(6x - 9)(6x + 2)}{3 \cdot 2}</math> </div>
Como ninguno de los binomios es divisible entre "6" entonces descomponemos el "6" en dos factores (3y2), de manera que uno divida a un factor binomio y el segundo divida al otro	$\longrightarrow$	$\frac{(6x-9)}{3} \frac{(6x+2)}{2}$
<b>Resultado</b>	$\longrightarrow$	$(2x - 3)(3x + 1)$

## Metodo de **TIJERAS** para resolver $ax^2+bx+c$

Ejemplo  $\rightarrow$

$8x^2+2x-15$

Se descompone el primer y el tercer término  $\rightarrow$

$2x$	$+3$	$=+12x$
$4x$	$-5$	$=-10x$
$8x^2$	$-15$	$\frac{2x}{-}$

$\rightarrow$

Se toman los factores  $\rightarrow$

$(2x+3)(4x-5)$

### Ejercicio No.1 Factoriza en dos factores

1. $6x^2 - 7x - 3$	2. $4x^2 - 7x - 2$
3. $3x^2 - 5x - 2$	4. $9x^2 - 81x + 50$
5. $6a^2x^2 + 5ax - 21$	6. $18x^2 - 17x - 187$
7. $5m^2 + 13m - 6$	8. $25x^2 + 30x + 9$
9. $6y^2 + 7y + 2$	10. $6x^2 - x - 2$

11. $2x^2 + 3x - 2$	12. $2x^2 + 11x + 9$
13. $4n^2 + 15n + 9$	14. $5x^2 - 10x - 15$
15. $44z + 20z^2 - 15$	16. $16x^2 + 8x + 1$
17. $6y^4 + 5y^2 - 6$	18. $10x^2 + 16x - 8$
19. $15x^4 - 23x^2 + 4$	20. $10x^2 - 13x - 3$
21. $6x^2 - 7x - 3$	22. $15x^2 - 29x - 14$
23. $20x^2 + 7x - 6$	24. $2x^2 + 12x + 18$
25. $18x^2 - 13x - 5$	26. $4x^2 - 4x + 1$
27. $2x^2 + 3x - 2$	28. $4x^2 + 44x + 72$
29. $5a^2 - 8a + 3$	30. $4a^2 - 8x + 3$
31. $3x^2 + 20x + 25$	32. $7x^2 - 9x + 2$

## 5. Factorización de una suma y de una diferencia de cubos.

**Primer paso.** Identificar que existan dos términos.

**Segundo paso.** Identificar si los términos tienen raíz cúbica exacta. Un término es cubo perfecto cuando tiene raíz cúbica exacta.

Esto lo podemos ver en los siguientes ejemplos:

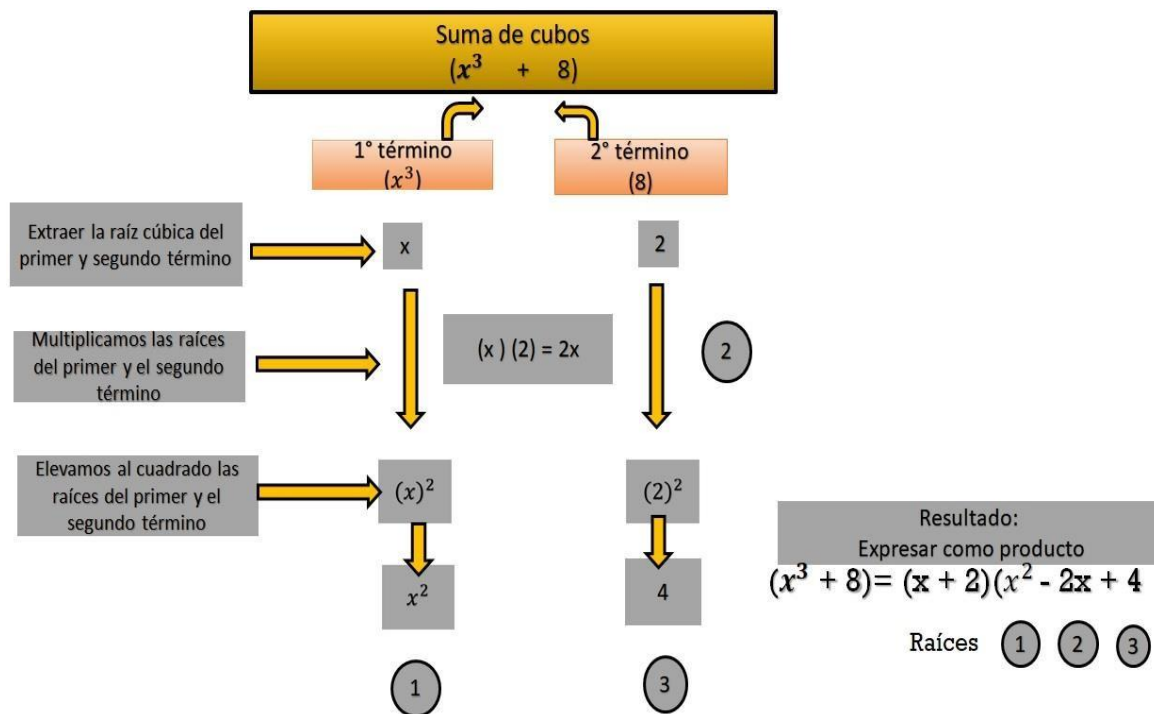
$$\sqrt[3]{27} = 3 \quad 3 \text{ es la raíz cúbica exacta de } 27, \text{ porque } 3^3 = 27$$

$$\sqrt[3]{216} = 6 \quad 6 \text{ es la raíz cúbica exacta de } 216, \text{ porque } 6^3 = 216$$

$$\sqrt[3]{x^6} = x^2 \quad x^2 \text{ es la raíz cúbica exacta de } x^6, \text{ porque } [x^2]^3 = x^6$$

$$\sqrt[3]{8x^9} = 2x^3 \quad 2x^3 \text{ es la raíz cúbica exacta de } 8x^9, \text{ porque } [2x^3]^3 = 8x^9$$

“La **suma** de dos cubos perfectos se descompone en dos factores, el primero es la suma de sus raíces cúbicas y el segundo se descompone del cuadrado de la primera raíz menos el producto de ambas raíces más el cuadrado de la segunda raíz”.



## Ejemplo

$$w^3 + 125 =$$

$$\sqrt[3]{w^3} = w$$

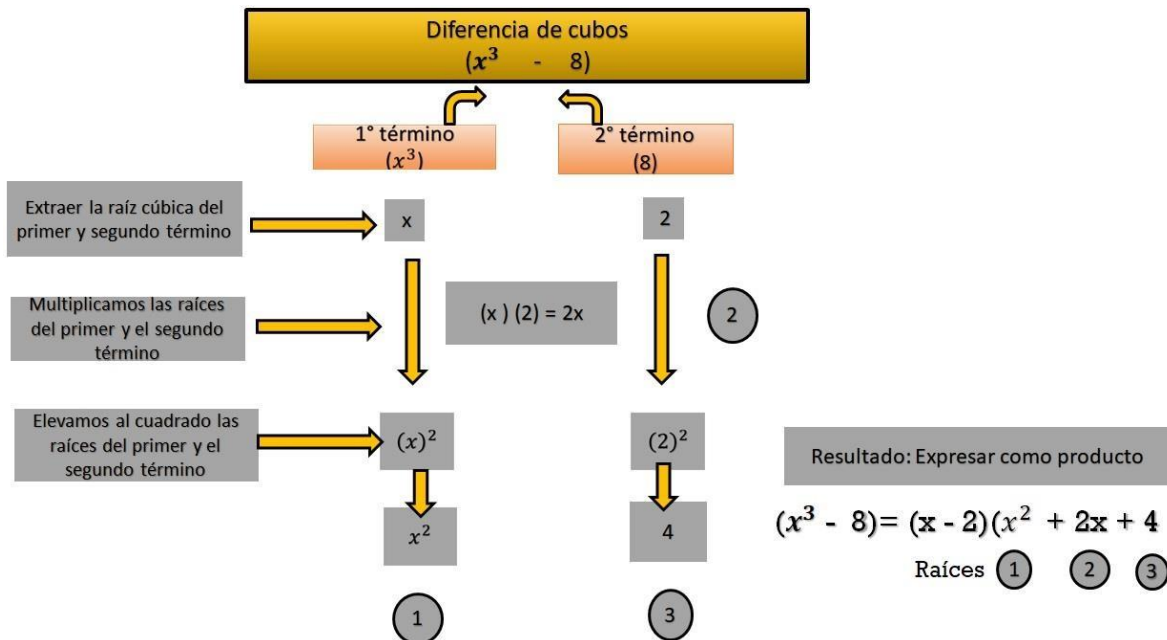
- La raíz cúbica de los términos.  $\sqrt[3]{125} = 5$
- El cuadrado de la primera raíz  $(w)^2 = w^2$
- El producto de ambas raíces  $(w)(5) = 5w$
- El cuadrado de la segunda raíz  $5^2 = 25$
- Por lo tanto:  $w^2 + 125 = (w + 5)(w^2 - 5w + 25)$

Ejemplo.  $64x^6 + y^3 =$

$$\sqrt[3]{64x^6} = 4x^2$$

- La raíz cúbica de los términos:  $\sqrt[3]{y^3} = y$
- El cuadrado de la primera raíz  $(4x^2)^2 = 16x^4$
- El producto de ambas raíces  $(4x^2)(y) = 4x^2y$
- El cuadrado de la segunda raíz  $(y)^2 = y^2$
- Por lo tanto,  $64x^6 + y^3 = (4x^2 + y)(16x^4 - 4x^2y + y^2)$

“La **diferencia** de dos cubos perfectos se descompone en dos factores, el primero es la diferencia de sus raíces cúbicas, y el segundo se compone del cuadrado de la primera raíz más el producto de ambas raíces más el cuadrado de la segunda raíz”.



### Ejemplo

$$w^3 - 125 =$$

$$\sqrt[3]{w^3} = w$$

- La raíz cúbica de los términos.  $\sqrt[3]{125} = 5$
- El cuadrado de la primera raíz  $(w)^2 = w^2$
- El producto de ambas raíces  $(w)(5) = 5w$
- El cuadrado de la segunda raíz  $5^2 = 25$
- Por lo tanto:  $w^2 + 125 = (w - 5)(w^2 + 5w + 25)$

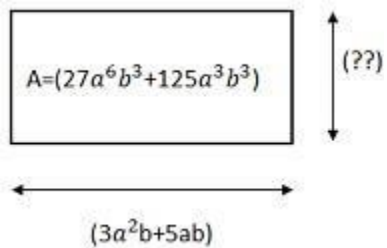
Ejemplo.  $64x^6 - y^3 =$

$$\sqrt[3]{64x^6} = 4x^2$$

- La raíz cúbica de los términos:  $\sqrt[3]{y^3} = y$
- El cuadrado de la primera raíz  $(4x^2)^2 = 16x^4$
- El producto de ambas raíces  $(4x^2)(y) = 4x^2y$
- El cuadrado de la segunda raíz  $(y)^2 = y^2$
- Por lo tanto,  $64x^6 + y^3 = (4x^2 - y)(16x^4 + 4x^2y + y^2)$

### Ejercicios para la clase:

I. Encuentra las dimensiones de la siguiente figura para las cuales se conoce el área y uno de sus lados



II. Escribe el elemento que falta en el proceso de factorización:

1)  $p^3 + 27 = (p + 3)(\underline{\hspace{1cm}} - 3p + 9)$

2)  $27x^3 - y^3 = (3x - \underline{\hspace{1cm}})(\underline{\hspace{1cm}} + 3xy + y)$

3)  $x^9 + 125 = (\underline{\hspace{1cm}} + 5)(\underline{\hspace{1cm}} - 5x^3 + 25)$

4)  $8x^3 - 64n^9 = (2x - \underline{\hspace{1cm}})(4x^2 + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}})$

**Ejercicio 1. Descomponer en dos factores**

1. $x^3 - y^3$	2. $a^3 - 125$
3. $1 - a^3$	4. $1 - 216m^6$
5. $x^3 + y^3$	6. $8a^3 + 27b^6$
7. $m^3 + n^3$	8. $x^6 + b^9$
9. $a^6 - 1$	10. $8x^3 - 27y^9$
11. $y^3 + 1$	12. $1 + 343n^3$
13. $y^3 - 1$	14. $64a^3 - 729$
15. $8x^3 - 1$	16. $a^3b^3 - x^6$
17. $1 - 8x^3$	18. $512 + 27a^3$
19. $x^3 - 27$	20. $x^6 - 8y^{12}$
21. $a^3 + 27$	22. $r^9 - 8s^6$
23. $8x^3 + y^3$	24. $1 + 729x^6$
25. $27a^3 - b^3$	26. $x^9 - 1$
27. $64 + a^6$	28. $27x^3 + 64$

**Recuerda**

Recuerda siempre primero sacar cualquier factor común.

Un binomio de la forma  $a^3 + b^3$  puede factorizarse como  $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Un binomio de la forma  $a^3 - b^3$  puede factorizarse como  $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

## 6. Resolución de ecuaciones lineales con una incógnita (Con coeficientes enteros).

### Ecuación

Es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas **incógnitas** y que sólo se verifica o es verdadera para **determinados valores** de las incógnitas.

Las incógnitas se representan por las últimas letras del alfabeto: x, y, z, u, v.

Así  $5x + 2 = 17$  es una **ecuación**, porque es una igualdad en la que hay una incógnita, la  $x$ , y ésta igualdad sólo es verdadera para el valor  $x = 3$ .

### Miembros

Se llama **primer miembro** de una ecuación o de una identidad a la expresión que está a la **izquierda** del signo de **igualdad** o **identidad**, y **segundo miembro** a la expresión que está a la derecha.

Así, en la ecuación  $3x - 5 = 2x - 3$  el primer miembro es  $3x - 5$  y el segundo miembro es  $2x - 3$ .

### Resolución de una ecuación

Resolver una ecuación es hallar sus raíces; o sea el valor o los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación, es decir, buscar los valores de las incógnitas para los que se vuelve verdadera la igualdad.

Las **ecuaciones de primer grado** con una incógnita tienen **una sola raíz** o una solución única que satisface la ecuación, es decir, la variable sólo toma un valor que satisface a la ecuación.

### Transposición de términos

Consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro al otro.

**Regla: cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro a otro efectuando la operación contraria a la que originalmente realizaba.**

1. Si a los dos miembros de una ecuación se suma una misma cantidad positiva o negativa, la igualdad subsiste.
2. Si a los dos miembros de una ecuación se resta una misma cantidad positiva o negativa, la igualdad subsiste.
3. Si a los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma cantidad positiva o negativa, la igualdad subsiste.
4. Si a los dos miembros de una ecuación se dividen por una misma cantidad positiva o negativa, la igualdad subsiste.
5. Si a los dos miembros de una ecuación se elevan una misma potencia o si a los dos miembros se extrae una misma raíz, la igualdad subsiste.

## Resolución de ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita

### Regla General

1. Se efectúan las operaciones indicadas, si las hay.
2. Se hace la transposición de términos, reuniendo en un miembro los términos que contengan la incógnita y en el otro miembro todas las cantidades conocidas.
3. Se reducen los términos semejantes en cada miembro.
4. Se despeja la incógnita dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita.

### Ejemplo:

Resolver la ecuación  $3x - 5 = x + 3$ .

1. Pasando  $x$  al primer miembro y  $-5$  al segundo, cambiándoles los signos, tenemos:  
 $3x - x = 3 + 5$ .
2. Reduciendo términos semejantes en el primer y segundo miembro tenemos que para  $3x - x = 2x$  y para  $3 + 5 = 8$ , por lo tanto nos queda:  $2x = 8$ .
3. Despejando  $x$  para lo cual dividimos los dos miembros de la ecuación entre 2 tenemos:  
 $\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$  y simplificando  $x = 4$ .

### Verificación

La verificación es la prueba de que un valor obtenido para la incógnita es correcto. Se realiza sustituyendo en los dos miembros de la ecuación dada la incógnita por el valor obtenido, y si éste es correcto, la ecuación dada se convertirá en identidad.

Para el ejemplo anterior si sustituimos el valor de 4 en la incógnita tenemos:

$$3(4) - 5 = (4) + 3;$$

$$12 - 5 = 4 + 3;$$

$7 = 7$ ; por lo que realizando las operaciones obtenemos que es verdadera la identidad.

**Ejercicio 1. Resuelve las siguientes ecuaciones.**

1. $4x + 1 = 2$	2. $y - 5 = 3y - 25$	3. $5x + 6 = 10x + 5$
4. $9y - 11 = -10 + 2y$	5. $21 - 6y = 27 - 8x$	6. $11x + 5x - 1 = 65x - 36$
7. $2x + 5x = 32 + 3x$	8. $4x - 23 = 4 - 3x + 11$	9. $16 + 7x - 5 = 11x - 3 - x$
10. $5y + 6y - 81 = 4y - 31$	11. $23x + 3 - 5x = 3x + 20$	12. $8x + 9 - 12x = 4x - 13 - 5x$
13. $2x - 9 - 10x = 4x - 23 - 5x$	14. $3x - 9 + 2x = 12 - 4x - 5x$	15. $4z + 9 - 2z = 14z - 13 - 15z$
16. $3v + 101 - 4v - 33 = 108 - 16v - 100$	17. $16 + 7y - 5 + y = 11y - 3 - x$	

18. $14 - 12x + 39x - 18x = 256 - 60x - 657x$	19. $8y - 15y - 30y - 51y = 53y + 31y - 172$
20. $15x - (6 - 6x) - 2x - (x + 3) - 3x = 5 - (7x + 23) - 4x + (3 - 2x) - 7$	

## 7. Problemas sobre ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita.

Los problemas planteados con palabras son enunciados que expresan relaciones entre cantidades numéricas. Nuestro objetivo es traducir la expresión del problema a una ecuación algebraica que pueda resolverse por medios conocidos.

Para resolver un problema planteado, se procede como sigue:

1. Se determina la cantidad incógnita y se le representa con una variable.
2. Todas las demás cantidades incógnitas se deben expresar en términos de la misma variable.
3. Se traducen los enunciados del problema relativos a la variable a una ecuación algebraica.
4. Se resuelve la ecuación para la incógnita y luego se encuentran las cantidades requeridas.
5. Se comprueba la respuesta en el problema original planteado con palabras, no en la ecuación algebraica.

Ejemplo:

La suma de las edades de Pedro y Juan es de 84 años, si Juan tiene 8 años menos que la de Pedro. Hallar ambas edades.

1. Sea  $x = \text{edad de Pedro}$
2. Como Juan tiene 8 años menos que Pedro, entonces: edad de Juan =  $x - 8$ .

3. El problema nos dice que la suma de las edades es igual a 84 años; luego tenemos la ecuación:  $x + (x - 8) = 84$
4. Resolviendo:  $x + x = 84 + 8$

$$2x = 92$$

$$x = 92/2$$

**x = 46 años; por lo tanto, Pedro tiene 46 años y Juan tiene 38 años.**

5. Verificando los resultados, obtenemos que la suma de la edad de Pedro = 46 años más la edad de Juan = 38 años es igual a 84 años, por lo que se cumple la condición dada del problema.

**Ejercicio 2. Encuentra la solución de los siguientes problemas.**

1. Si a un número se le suma 15, el resultado es 21. Determina el número.
2. Cuando se resta 11 de cierto número, el resultado es 52. Obtenga el número.
3. Si al doble de un número se le aumenta 7, resulta 35. Halle el número.
4. El triple de un número disminuido en 19 es 53, determine el número.

5. Ocho veces un número es 30 unidades más que 6 veces él mismo. Encuentre el número.

6. Si a siete tantos de un número se le suma 6, resulta el número aumentado en 24. Obtenga el número.

7. Un número es igual al cuádruplo de otro y la suma de ambos es 80. Halle los dos números.

8. Un número es igual a 7 veces el otro, y la suma de ambos es 176. Halle los dos números.

9. La suma de dos números es 24. Uno de ellos es el triple del otro. Obtenga los números.

10. Un número es 40 unidades menor que otro. Obtenga ambos números si su suma es 280.

11. La suma de dos números es 48. El cuádruplo del menor es igual al doble del mayor. Encuentre los números.

12. Un número es 3 unidades menor que otro. Determine ambos números si el cuádruplo del menor es una unidad menos que el triple del mayor.

13. La suma de dos números es 106 y el mayor excede al menor en 8. Obtenga los números.

14. Entre Ana y José tienen 1 154 pesos, si José tiene 506 menos que Ana. ¿Cuánto tiene cada uno?

15. María tiene 14 años menos que Pablo y ambas edades suman 56 años. Obtenga las edades de cada uno.

## 8. Resolución de Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (Métodos de: eliminación, sustitución e igualación) y planteamiento de problemas que dan lugar a un sistema de ecuaciones lineales.

Resolver un sistema de ecuaciones significa encontrar el valor numérico de todas sus incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones del sistema; para dicha resolución existen varios métodos, sin embargo, en este primer semestre solamente se abordará el método de eliminación, el método de sustitución y el método de igualación.

### Método de eliminación (También conocido como método de reducción o método de suma y resta):

Pasos:

1. Ordenar las ecuaciones de tal forma que se encuentre el coeficiente con x, el coeficiente con y, el coeficiente sin letra.
2. Cuando los coeficientes de una misma letra no pueden ser cancelados directamente, multiplica cada ecuación por el coeficiente de la otra ecuación cuidando que sean los coeficientes de una misma incógnita y además al final queden con signos cambiados.
3. Suma / resta los términos semejantes de ambas ecuaciones.
4. Resuelve la ecuación lineal resultante.
5. Sustituir el valor encontrado de una incógnita en las ecuaciones originales para encontrar el valor de la segunda incógnita.

$$\left\{ \begin{array}{l} 8x - 3y = 5 \quad (5) \\ 7x - 5y = 2 \quad (-3) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 21x + 15y = -6 \\ \underline{40x - 15y = 25} \\ 19x = 19 \\ x = \frac{19}{19} \\ x = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 7x - 5y = 2 \\ 7(1) - 5y = 2 \\ 7 - 5y = 2 \\ -5y = 2 - 7 \\ y = \frac{-5}{-5} \\ y = 1 \end{array}$$

**Solución (1,1)**

### Método de sustitución:

Pasos:

1. Despejar una incógnita en una de las ecuaciones.
2. Sustituir la expresión equivalente de la ecuación despejada del paso 1 en la otra ecuación.
3. Resolver la ecuación lineal resultante del paso 2.
4. Sustituir el valor encontrado de una incógnita en la ecuación despejada del paso 1 para encontrar el valor de la segunda incógnita.

$$2x + 3y = 20 \quad \text{Ecuación 1}$$

$$x - 2y = 3 \quad \text{Ecuación 2}$$

Despejar la variable  $x$

Ecuación 2

$$x - 2y = 3$$

$$x = 3 + 2y$$

Reemplazo el valor de  $y$

$$x = 3 + 2y$$

$$x = 3 + 2(2)$$

$$x = 3 + 4$$

$$x = 7$$

Sustituir en la otra ecuación

Ecuación 1

$$2x + 3y = 20$$

$$2(3 + 2y) + 3y = 20$$

$$6 + 4y + 3y = 20$$

$$6 + 7y = 20$$

$$7y = 20 - 6$$

$$7y = 14$$

$$y = \frac{14}{7}$$

$$y = 2$$

**Método de igualación:**

Pasos:

1. Despejar una misma incógnita en ambas ecuaciones del sistema.
2. Igualar las ecuaciones despejadas del paso 1.
3. Resolver la ecuación lineal resultante del paso 2.
4. Sustituir el valor encontrado de una incógnita en las ecuaciones despejadas del paso 1 para encontrar el valor de la segunda incógnita.

$$x + 4y = 9$$

$$x + 2y = 5$$

DESPEJAMOS "x" EN AMBAS ECUACIONES

$$x + 4y = 9 \implies x = 9 - 4y$$

$$x + 2y = 5 \implies x = 5 - 2y$$

IGUALAMOS:

$$9 - 4y = 5 - 2y$$

$$-4y + 2y = 5 - 9$$

$$-2y = -4$$

$$y = \frac{-4}{-2}$$

$$y = 2$$

SUSTITUIMOS "y" EN UNA DE LAS ECUACIONES DESPEJADAS:

$$x = 9 - 4y$$

$$x = 9 - 4(2)$$

$$x = 9 - 8$$

$$x = 1$$

SOLUCION:

$$x = 1 ; y = 2$$

COMPROBAMOS REMPLAZANDO UNA DE LAS ECUACIONES PRINCIPALES:

$$x + 4y = 9$$

$$1 + 4(2) = 9$$

$$1 + 8 = 9$$

$$9 = 9 \implies \text{Correcto!}$$

Ejercicio de ejemplo resuelto por los 3 métodos por el docente.

Resuelve el sistema de ecuaciones formado por  $2x + 4y = 16$ ,  $3x - y = 3$

Respuestas:  $x=2$ ,  $y=3$

Ejercicio No. 1

**Resuelve los siguientes sistemas por el método que elijas .**

$2x+y = 3$ $5x+3y = 10$	$4x-7y = -10$ $3x+2y = 7$
$8x-3y = 5$ $5x-2y=4$	$2x + y = -2$ $6x-5y= 18$
$x= 3-4y$ $y=2+5y$	$10x-3= y$ $Y=5x+1$
$3x+y-5=0$	$4x-7y+1=0$

$2y=10-6x$	$8x= 14y-4$
------------	-------------

**Ejercicio No.2**

**Plantea el sistema de ecuaciones en cada problema (NOTA: No resolver el problema, solamente obtener el planteamiento del sistema de ecuaciones).**

<p>1.- Se tiene que 5kg de almendra y 4 kg de nuez cuestan 44 pesos, mientras que 8 kg de almendra y 6kg de nuez cuestan 69 pesos. Encuentra el precio por kilogramo de cada producto.</p>	<p>2.- En un juego de futbol se vendieron 10,000 boletos. El precio de los boletos en la sección numerada fue de 40 pesos y en la general de 15 pesos. El ingreso total obtenido fue de 310,000 pesos. Determina cuántos boletos se vendieron en la sección numerada y cuántos en la general.</p>
<p>3.- Un avión avanza con rapidez de 600 millas por hora con el viento a favor y con una rapidez de 560 millas por hora con el viento en contra. Calcula la rapidez del viento.</p>	<p>4.- Un comerciante pagó 110 pesos por 20 artículos de papelería entre cuadernos y bolígrafos. Si cada cuaderno cuesta 7 pesos y cada bolígrafo 2 pesos, ¿Cuántos cuadernos compró?</p>

--	--

5.- El señor Paco tiene 40 años y su hijo Hugo tiene 10 años. ¿Qué edad tendrá cada uno cuando la edad de Paco sea el triple de edad que Hugo?