



# GUÍA DE ESTUDIOS PARA PRESENTAR ETS

## Probabilidad y Estadística

SEMESTRE

2024-2

**TURNO: Vespertino**

La presente Guía debe entregarse:

Sí No

A quien se entrega. A Cada profesor

**HORARIO**

[3 a 9 pm

**FECHA**

(3 dias antes del ETS)

**Tiene un valor de: 0%**

**Requisitos:**

**Debe de estar resuelta con procedimientos**



Elaborada por:

### **INTEGRANTES DE LA ACADEMIA**

Juan José Beltrán Corona

Julio César Domínguez Galván

Jesús Gutiérrez Morán

Eric Hernández Quintana

Gerardo Hernández Villegas

### **Introducción**

La siguiente guía de la unidad de aprendizaje de Probabilidad y Estadística, te permitirá, contar con una herramienta de aprendizaje que reforzará, la solución de ejercicios que te permitirán identificar y aplicar la nomenclatura de la Probabilidad y la Estadística, así como su interpretación, ejercicios con gráficas y las aplicaciones; además de autoevaluarte para definir en qué tema o temas requieres de una asesoría especializada.

Se pretende que al resolverla, logres presentar con éxito tu examen de recuperación, de las unidades: Integral indefinida, Métodos de integración e Integral definida, así como su aplicación en tu entorno socioeconómico.

### **Objetivos**

Prepararte para que refuerces tus competencias en el análisis y solución de diferentes tipos temas de la Probabilidad y Estadística, y la aplicación en su entorno socioeconómico.



## Justificación

La materia de Probabilidad y Estadística se presenta en el currículo en sexto semestre y es de suma importancia ya que su objetivo es la toma de decisiones que te permitirán desarrollar en el futuro modelos matemáticos para predecir fenómenos en los diferentes entornos de tu vida.

## Estructura y contenidos

Unidad I Antecedentes de probabilidad y al estadística.

Unidad II Estadística Descriptiva.

- a) Población y muestra.
- b) Variables discretas y continuas.
- c) Datos brutos o crudos.
- d) Datos agrupados.
- e) Serie simple.
- f) Frecuencias.
- g) Serie de frecuencias.
- h) Distribución de frecuencias o serie de clases y frecuencias.
- i) Rango y clases.
- j) Límites de clase, establecidos y reales.
- k) Histogramas y polígono de frecuencias.
- l) Ojiva y polígono de frecuencias.
- m) Distribución de frecuencias.
- n) Medidas de tendencias central.
- o) Medidas de posición.
- p) Medidas de asimetría.



### Unidad III Teoría de Conjuntos.

- a) Notación para conjunto.
- b) Operaciones con conjuntos.
- c) Diagramas de Venn Euler.
- d) Diagrama de árbol.
- e) Cardinalidad de la unión de conjuntos.

### Unidad IV Principios fundamentales del conteo.

- a) Técnicas de conteo.
- b) Principio fundamental de la multiplicación.
- c) Notación factorial.
- d) Combinaciones y permutaciones con solución de problemas.

### Unidad V Probabilidad condicional, teorema de Bayes.

- a) Espacio muestral y espacio muestral reducido.
- b) Probabilidad condicional.
- c) Teorema de Bayes.

### Unidad VI: Variable aleatoria, función de probabilidad y función de probabilidad acumulada, esperanza matemática, varianza, desviación estándar, distribuciones teóricas de probabilidad; binomial y normal.

- a) Variable aleatoria, función de probabilidad y función de probabilidad acumulada.
- b) Esperanza matemática, varianza, desviación estándar.
- c) Distribuciones teóricas de probabilidad; binomial y normal.



## Evaluación

No tiene ningún valor numérico solo requisito para presentar el examen, ya que propicia el aprendizaje para la solución del mismo.

### Unidad II Estadística Descriptiva.

Ejercicio: de las siguientes distribuciones de frecuencia, determinar:

- Límites reales
- Marca de clase
- Frecuencia relativa simple
- Frecuencia absoluta acumulada
- Frecuencia relativa acumulada
- Histograma y polígono de frecuencias
- Ojiva ascendente
- Media aritmética
- Media geométrica
- Media armónica

#### A)

CLASES	FRECUENCIAS
25-29	2
30-34	4
35-39	3
40-44	5
45-49	3
50-54	2
55-59	4
60-64	1
65-69	2
70-74	1

#### B)

CLASES	FRECUENCIAS
115-119	1
120-124	0
125-129	3
130-134	1
135-139	6
140-144	6
145-149	8
150-154	5
155-159	3
160-164	3
165-169	2
170-174	1
175-179	1



Tabla A)

Clases		Frecuencias	Límites Reales		Marca de clase	Frecuencia relativa simple (%)	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa acumulada (%)
25	29							
30	34							
35	39							
40	44							
45	49							
50	54							
55	59							
60	64							
65	69							
70	74							
		<b>N=</b>	<b>27</b>					

Unidad III: Teoría de Conjuntos.

**EJERCICIO: Demostrar la primera Ley de Morgan:**  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Con  $U = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 20\}$

$A = \{x | x, \text{ es impar}\}$

$B = \{x | x, \text{ es primo}\}$

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

$(A \cup B) = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

$(A \cup B)^c = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

$A^c = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

$B^c = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$



$$A^c \cap B^c = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \quad \therefore (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad LQQD$$

**EJERCICIO: Demostrar la segunda Ley de Morgan:**  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$$\text{Con } U = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 20\}$$

$$A = \{x | x, \text{ es impar}\}$$

$$B = \{x | x, \text{ es primo}\}$$

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

$$(A \cap B) = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

$$(A \cap B)^c = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$$

$$A^c = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

$$B^c = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$$

$$A^c \cup B^c = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\} \quad \therefore (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad LQQD$$

### RELACIÓN DE PERTENENCIA

Para expresar si un elemento pertenece o no pertenece a un conjunto se utilizan los símbolos  $\in$  o  $\notin$ . Ejemplo: si  $A = \{a, e, i, o, u\}$  ----  $a \in A$  y  $n \notin A$ .

### SUBCONJUNTO

Si cada elemento de un conjunto **A** pertenece también a un conjunto **B** se dice que **A** es subconjunto de **B** o que  $A \subset B$  o bien B contiene a A ( $B \supset A$ )

$$A = \{a, e, i, o, u\} \quad B = \{m, u, r, c, i, e, l, a, g, o\}$$

### CONJUNTOS IGUALES

Dos conjuntos son iguales si cada uno está contenido en el otro

$$\text{Si } M \subset N \text{ y } N \subset M \therefore M = N$$

### CONJUNTO UNIVERSO

Conjunto que delimita el campo de trabajo. Contiene a todos los elementos con los cuales se va a trabajar. Se representa con la letra  $U, \Omega$  o  $S$ .

### CARDINALIDAD DE CONJUNTO

La cardinalidad de un conjunto **A** se va a escribir como  $(n(A))$  y es el número de



elementos que contiene un conjunto.

$$A = \{a, b, c\} \quad n(A) = 3$$

### CARDINALIDAD DE LA UNIÓN DE CONJUNTOS

De la unión de conjuntos. Si **A** y **B** son **conjuntos disjuntos** (no tienen elementos en común), el número de elementos de la unión es  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

Si **A** y **B** son **conjuntos no disjuntos** (tienen elementos en común), el número de elementos de la unión es:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Si **A**, **B** y **C**, son **conjuntos no disjuntos** (tienen elementos en común), el número de elementos de la unión es:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

**Ejemplo 1:** Una de las dependencias de gobierno ha realizado un censo sobre la población económicamente activa en el DF, obteniendo la siguiente información:

**40.5%** está estudiando **A**

**38.9%** está trabajando **B**

**41.5%** es menor de 25 años **C**

**8.6%** está estudiando y trabajando **ANB**

**24.9%** es menor de 25 años y está estudiando **ANC**

**16%** es menor de 25 años y está trabajando **BNC**

**77.6%** estudia o trabaja o es menor de 25 años **AUBUC**

El estado desea saber:

a) ¿Qué porcentaje de la población del DF, no entra en alguna de las tres categorías?

$$100 - 77.6 = 22.4\%$$

b) ¿Qué porcentaje es menor de 25 años, estudia y trabaja? **ANBNC**

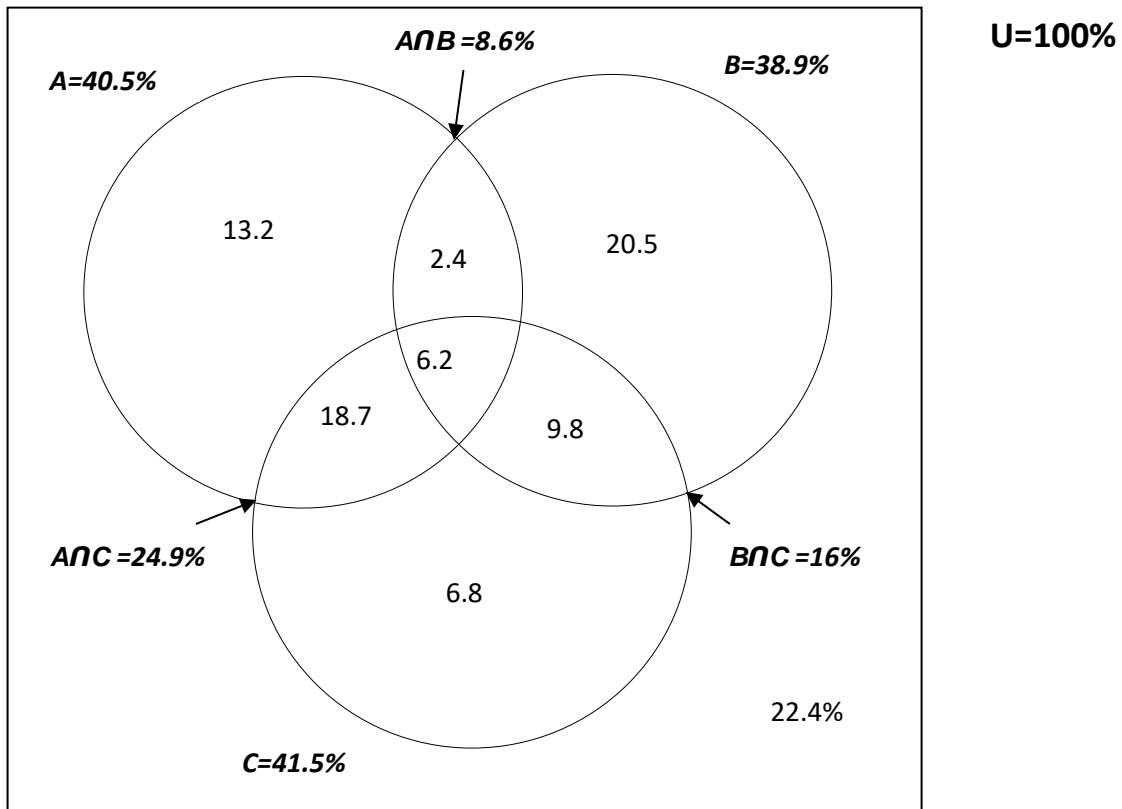
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$77.6 = 40.5 + 38.9 + 41.5 - 8.6 - 24.9 - 16 + n(A \cap B \cap C)$$

$$n(A \cap B \cap C) = 77.6 - 120.9 + 49.5 = 6.2\%$$

c) ¿Qué porcentaje se encuentra en dos de estas categorías a la vez?

$$18.7 + 2.4 + 9.8 = 30.9\%$$



**Ejemplo 2:** Un jefe de publicidad ha entrevistado a **2000** personas para apreciar los efectos de tres programas de radio. Al tabular los resultados de la muestra ha concluido que:

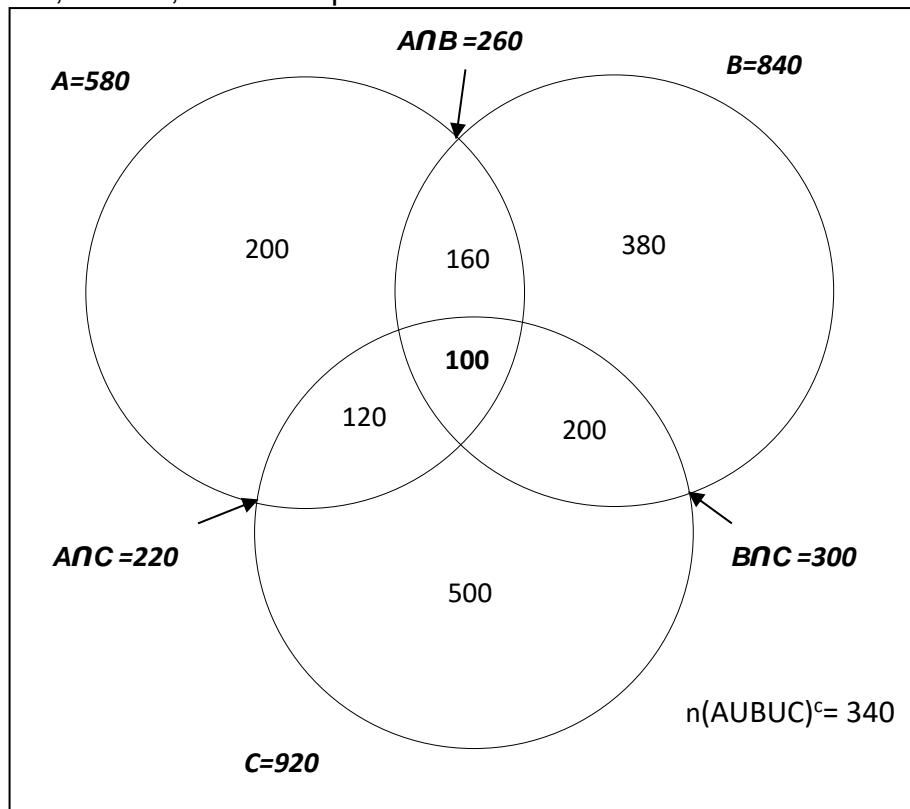
- **580** escuchan el programa **A**
- **840** escuchan el programa **B**
- **920** escuchan el programa **C**
- **260** escuchan el programa **A y B,  $A \cap B$**
- **220** escuchan el programa **A y C,  $A \cap C$**
- **300** escuchan el programa **B y C,  $B \cap C$**
- **100** escuchan el programa **A, B y C,  $A \cap B \cap C$**

Se pregunta:

- ¿Cuántas personas escuchan sólo el programa A? ¿sólo el B? ¿sólo el C?  
Solo(A)=200, solo(B)=380 y solo(C)=500 personas.
- ¿Cuántas personas escuchan solo los programas A y B? ¿sólo A y C? ¿sólo B y C? A y B = 160, A y C = 120, B y C = 200 personas.
- ¿Cuántas personas escuchan el programa B, el programa C o ambos?  
 $380+500+200 = 1,080$  personas.
- ¿Cuántas personas escuchan al menos uno de los tres programas?  
 $n(A \cup B \cup C) = 580 + 840 + 920 - 260 - 220 - 300 + 100 = 1,660$  personas



- e) ¿Cuántas personas escuchan sólo uno de los tres programas?  
 $solo(A) + solo(B) + solo(C) = 200 + 380 + 500 = 1,080 \text{ personas}$
- f) ¿Cuántas personas no escuchan ninguno de los tres programas?  
 $2,000 - 1,660 = 340 \text{ personas.}$



$U=2,000$

$2,000-1,660=340$

$$Solo(A) = n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$Solo(B) = n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$Solo(C) = n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

**Ejemplo 3:** El departamento de préstamos del ISSSTE ha efectuado una encuesta entre sus empleados, como parte de un estudio para determinar las prioridades de asignación de préstamos personales. Se obtuvieron **2600** respuestas con los siguientes resultados:

- **800** son casados **A**
- **1000** habitan en vivienda arrendada **B**
- **950** perciben ingresos menores a \$10,000 mensuales **C**
- **200** son casados, no habitan en vivienda arrendada y perciben ingresos superiores a \$ 10,000 mensuales.
- **350** son casados y habitan en vivienda arrendada **A∩B**
- **230** son solteros, habitan en vivienda arrendada y perciben ingresos menores a \$10,000 mensuales.



- **350** son casados y perciben ingresos inferiores a \$10,000 mensuales **A∩C**  
 Se pretende determinar:

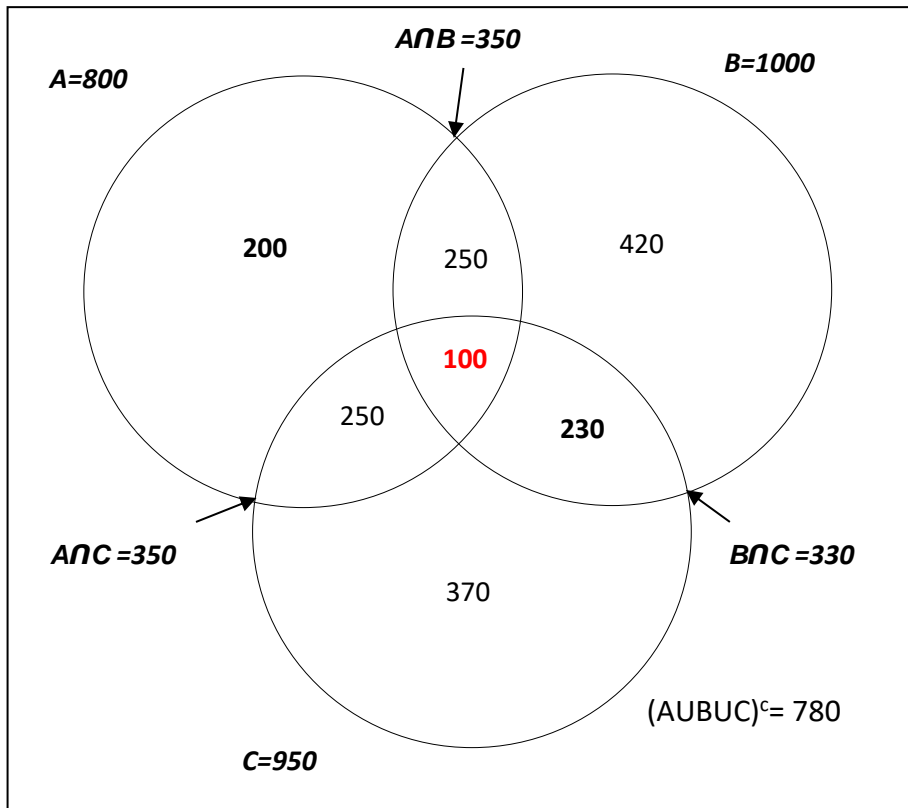
- a) ¿Cuántos afiliados son casados, habitan en vivienda arrendada y perciben ingresos menores a \$10,000 mensuales?  $n(A \cap B \cap C) = 100$
- b) ¿Cuántos afiliados son solteros, habitan en vivienda propia y perciben ingresos superiores a \$10,000?  $(A \cup B \cup C)^c = 780$
- c) ¿Cuántos afiliados son solteros, habitan en vivienda arrendada y perciben ingresos inferiores a \$10,000 mensuales? 230

$$\text{Solo}(A) = n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$200 = 800 - 350 - 350 + n(A \cap B \cap C)$$

$$200 - 100 = n(A \cap B \cap C)$$

$$\therefore n(A \cap B \cap C) = 100$$



$$U = 2,600$$

$$2,600 - 1820 = 780$$



## Unidad IV Principios fundamentales de conteo.

### TÉCNICAS DE CONTEO

Si un evento se puede realizar de " $n$ " formas, " $n$ =maneras diferentes", y si continúa el proceso seguido de un evento que se puede realizar de " $n_2$ " maneras diferentes, y si después de efectuado tomáramos un tercer evento, que se puede realizar de " $n_3$ " maneras, así sucesivamente, entonces el número de maneras de los eventos en que se pueden realizar en el orden indicado de  $n_1 - n_2 - n_3 \dots - n_n$

A esto se le conoce como el **principio fundamental de la multiplicación**.

Ejemplo: Supongamos que una placa de automóvil consta de dos letras distintas seguidas de tres dígitos de los cuales el primero no es 0 (cero). ¿Cuántas placas diferentes pueden grabarse?

$$\begin{aligned}n(\text{abecedario}) &= 26 \\n(\text{dígitos} - 0) &= 9 \\n_2(\text{dígitos}) &= 10 \\(26)(25)(9)(10)(10) &= 585,000 \text{ placas diferentes}\end{aligned}$$

### NOTACIÓN FACTORIAL

El factorial de un número ( $N!$  "n factorial") es el producto de los enteros positivos desde **1 hasta n inclusive**.

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned}5! &= 1.2.3.4.5 = 120 \\2! &= 1.2 = 2 \\3! &= 1.2.3 = 6 \\6! &= 1.2.3.4.5.6 = 720\end{aligned}$$

Por definición  $0!$  es igual a 1

Ejemplo 2:

Consideremos un juego de naipes de 52 barajas para póker, si barajamos y escogemos una carta al azar anotamos su valor como figura (diamantes, corazones, tréboles y picas) y si repetimos 4 veces el proceso ¿de cuántas formas diferentes se puede escoger una carta?

$$\begin{aligned}n_1 - n_2 - n_3 \cdot n_4 \\(52)(52)(52)(52) &= 7'311,616\end{aligned}$$



**Ejemplos:**

- 1) Una placa de automóvil consta de 3 letras y 3 dígitos, de las letras no se pueden considerar la "O" y la "I", por su parecido con el cero y el uno respectivamente, ¿calcula el número de placas que se pueden grabar?

A - Z	A - Z	A - Z	0 - 9	0 - 9	0 - 9
(24)	(24)	(24)	(10)	(10)	(10)
LETRAS			DÍGITOS		

Número de placas que pueden grabarse son:

$$(24)(24)(24)(10)(10)(10) = (24)^3(10)^3 = 13'824,000$$

- 2) Una placa de automóvil consta de 3 dígitos y 3 letras, de las letras no se pueden considerar la "O", la "I" y la "Ñ", por su parecido con el cero, el uno y la N respectivamente, ¿calcula el número de placas que se pueden grabar?

0 - 9	0 - 9	0 - 9	A - Z	A - Z	A - Z
(10)	(10)	(10)	(23)	(23)	(23)
DÍGITOS			LETRAS		

Número de placas que pueden grabarse son:

$$(10)(10)(10)(23)(23)(23) = (10)^3(23)^3 = 12'167,000$$

- 3) Una placa de automóvil consta de 2 dígitos y 4 letras, de las letras no se pueden considerar la "O", la "I" y la "Ñ", por su parecido con el cero, el uno y la N respectivamente, ¿calcula el número de placas que se pueden grabar?

A - Z	0 - 9	0 - 9	A - Z	A - Z	A - Z
(23)	(10)	(10)	(23)	(23)	(23)
LETRA y 2 DÍGITOS			LETRAS		

Número de placas que pueden grabarse son:

$$(23)(10)(10)(23)(23)(23) = (10)^2(23)^4 = 27'984,100$$

- 4) Considerando un juego de naipes de 52 barajas para PÓKER, si barajamos y escogemos una carta al azar y anotamos su valor como figura (diamantes, corazones, tréboles y espadas), y repetimos 3 veces el proceso, ¿de cuántas formas diferentes se puede escoger una carta?

$$(52)(52)(52) = (52)^3 = 140,608 \text{ formas diferentes}$$

- 5) Calcula las siguientes operaciones con factorial de un número:

a)  $10!/8! = 90$



**b)  $12!/10! = 132$**

**c)  $4!(3!) = 144$**

**d)  $1!(0!) = 1$**

**e)  $13!/11! = 156$**

### NÚMERO DE ELEMENTOS DEL PRODUCTO CARTESIANO

Si  $A = \{1,2,3\}$  y  $B = \{a, b, c, d\}$

$(A \times B)$

$= \{(1, a) (1, b) (1, c) (1, d) (2, a) (2, b) (2, c) (2, d) (3, a) (3, b) (3, c) (3, d)\}$

El total de elementos de  $A \times B$  es 12. Es decir  $n(A \times B)$  es igual a  $n(A) \times n(B) = (3)(4)=12$  elementos.

### PERMUTACIONES

Una ordenación de un conjunto de " $n$ " objetos en un orden dado se llama *permutación de los objetos* (tomados todos a la vez). Una ordenación de un número " $r$ " de dichos objetos con " $r \leq n$ ", en un orden dado se llama una permutación  $r$  o una permutación de los " $n$ " objetos tomados " $r$ " a la vez.

Ejemplo: si  $A = \{a, b, c, d\}$

$bdca, dcba, acbd$ , son permutaciones de 4 letras tomadas todas a la vez.

$bad, adb, cbd, bca$ , son permutaciones de 4 letras tomadas tres a la vez.

$ab, cb, da, bd$ , son permutaciones de 4 letras tomadas 2 a la vez.

### NOTACIÓN

**N** objetos tomados todos a la vez:  $nPn = P(n, n) = P_n^n$

**N** objetos tomados  $r$  a la vez:  $nPr = P(n, r) = P_r^n$ ,  $r \leq n$

Ejercicio: Hallar el número de permutaciones de 5 objetos ( $a, b, c, d, e$ .)

A) Tomados todos (5) a la vez:  $5P5 = P(5, 5) = P_5^5$

B) Tomados 3 a la vez  $5P3 = P(5, 3) = P_3^5$

C) Tomados 2 a la vez  $5P2 = P(5, 2) = P_2^5$

Usando el principio fundamental del conteo sería:

A)  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5P5 = 120$

B)  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 5P3 = 60$

C)  $5 \cdot 4 = 5P2 = 20$

- Permutaciones de 5 en 5  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5P5 = 120$

- Permutaciones de 5 en 3  $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$

- Permutaciones de 5 en 2  $\frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$



De acuerdo con el resultado:

- Todas las permutaciones de  $n$  en  $n = n!$

$$P_n^n = n!$$

- Todas las permutaciones de  $n$  en  $r$

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad r \leq n$$

### COMBINACIONES

En un conjunto de  $n$  elementos, una combinación de objetos tomados  $r$  a la vez (con  $r$  menor o igual que  $n$ ) es un subconjunto de  $r$  elementos. **En una combinación el orden no se toma en cuenta.** El número de combinaciones de  $n$  objetos tomados  $r$  a la vez se denota por:

$$C_r^n = nCr = C(n, r)$$

Las combinaciones de las letras  $a, b, c, d$  tomadas tres a la vez son:  
 $abc, abd, acd, bcd$ .

En las combinaciones de  $abc = acb = bca = cab = cba$ .

### COMBINACIONES

$abc$

$abd$

$acd$

$bcd$

$$C_3^4 = 4$$

### PERMUTACIONES

$abc, acb, bac, bca, cab, cba$

$abd, adb, bad, bda, dab, dba$

$acd, adc, dac, dca, cad, cda$

$bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb$

$$P_3^4 = 24$$

Nos haremos una pregunta: ¿De que manera puedo igualar el resultado de las combinaciones y las permutaciones?

La respuesta es multiplicando a las combinaciones por un factor, que en este caso es el número 6 y lo resolveremos de la siguiente manera:

$$6 \cdot C_3^4 = P_3^4 \quad P_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!}$$

$$3! \cdot C_3^4 = P_3^4$$

$$C_3^4 = \frac{P_3^4}{3!}$$



$$C_3^4 = \frac{4!}{3!(4-3)!} \therefore C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

### 3.3 CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD

**Probabilidad:** Es el estudio de experimentos aleatorios.

Al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se le llama **espacio muestral** y se denota por **S**.

A cada uno de los resultados posibles se le llama evento, entonces un **evento** es un subconjunto del espacio muestral.

Los eventos se pueden combinar para obtener nuevos eventos.

#### EXPERIMENTO ALEATORIO DE PROBABILIDAD

Ejemplo: Sea el experimento aleatorio de lanzar un dado, obtener:

a) El espacio muestral.  $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

b) Algunos eventos.

Qué salga 1

$$A = \{1\}$$

Qué salga 2

$$B = \{2\}$$

Qué salga 5

$$C = \{5\}$$

Qué salga 6

$$D = \{6\}$$

Qué salga par

$$E = \{2,4,6\}$$

Qué salga impar

$$F = \{1,3,5\}$$

Qué salga primo

$$G = \{2,3,5\}$$

Qué salga par o primo

$$H = \{2,3,4,5,6\}$$

Qué salga 7

$$I = \phi = \text{evento imposible}$$

Qué salga impar o primo

$$J = \{1,2,3,5\}$$

Qué no salga primo

$$G^c = \{1,4,6\}$$

Qué salga 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$$S = \text{evento seguro}$$

### 3.4 ASIGNACION DE LA PROBABILIDAD EN UN EVENTO

La probabilidad puede interpretarse como la posibilidad de que un evento ocurra.

Si el experimento es lanzar un dado, y el evento es que salga 3; entonces la probabilidad de que salga 3 es  $1/6$  es decir:

$$\text{PROBABILIDAD DEL EVENTO} = \frac{\text{NÚMERO DE RESULTADOS FAVORABLES}}{\text{NÚMERO DE RESULTADOS POSIBLES}}$$

$$P(K) = n(K) / n(S) \\ 0.1666 \times 100\% = 16.66\%$$

$$P(3) = n(1) / n(6) = 1/6 =$$



### 3.5 TEORÍA AXIOMÁTICA DE LA PROBABILIDAD

#### AXIOMAS DE PROBABILIDAD

1.  $P(S) = 1$  " La probabilidad del evento seguro es 1 "
2.  $P(\phi) = 0$  " La probabilidad del evento imposible es 0 "
3. **Para todo** evento (A), con  $A$  menor o igual que  $P(A)$  menor o igual que 1.

$$\forall (A) \text{ con, } 0 \leq P(A) \leq 1$$

4. Si **A** es un evento:

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

#### TEOREMA DE LA UNIÓN DE EVENTOS

##### EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES = DISJUNTOS = AJENOS

(No tienen elementos en común, la intersección es el conjunto vacío)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \dots + P(A_n)$$

##### EVENTOS NO EXCLUYENTES (Tienen elementos en común)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

#### EJEMPLO:

¿Cuántas palabras diferentes se pueden construir usando todas las letras de la palabra **REARRANGE**?

Solución. Tenemos **9** posiciones para acomodar, y son (3R), (2E), (2A), (1N), (1G), por lo que podemos calcular:

$$\therefore C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$(9C3), (6C2), (4C2), (2C1), (1C1)$$

$$\left( \frac{9!}{3!(9-3)!} \right) \left( \frac{6!}{2!(6-2)!} \right) \left( \frac{4!}{2!(4-2)!} \right) \left( \frac{2!}{1!(2-1)!} \right) \left( \frac{1!}{1!(1-1)!} \right)$$

$$\left( \frac{9!}{3!(6)!} \right) \left( \frac{6!}{2!(4)!} \right) \left( \frac{4!}{2!(2)!} \right) \left( \frac{2!}{1!(1)!} \right) \left( \frac{1!}{1!(0)!} \right)$$

$$\left( \frac{9!}{3!} \right) \left( \frac{1}{2!} \right) \left( \frac{1}{2!} \right) \left( \frac{1}{1!} \right) \left( \frac{1}{1!(0)!} \right) = \left( \frac{9!}{3!2!2!1!1!} \right) = \left( \frac{9!}{3!2!2!} \right) = 15,120 \text{ palabras diferentes}$$



## Unidad IV Probabilidad condicional, teorema de Bayes, espacio muestral y espacio muestral reducido.

### ESPACIO MUESTRAL REDUCIDO

#### PROBABILIDAD CONDICIONAL

Sea **S** un espacio muestral finito equiprobable con eventos **A** y **B**, entonces la probabilidad de que un evento **A** suceda una vez que el evento **B** haya sucedido es:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(A/B) = \text{probabilidad de } \mathbf{A} \text{ dado } \mathbf{B}$$

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = n(A \cap B) / n(B)$$

En cierto modo  $P(A/B)$  es la  $P(A)$  en relación a **B** (espacio muestral reducido)

#### EVENTOS INDEPENDIENTES

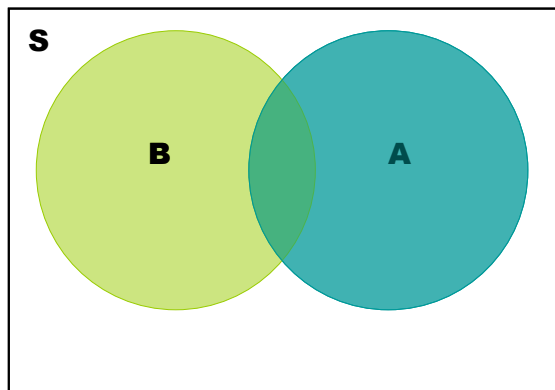
Se dice que los eventos son independientes si la probabilidad de que el evento ocurra no está influenciada por el hecho de que el segundo evento haya o no sucedido.

#### TEOREMA DE INTERSECCIÓN DE EVENTOS

##### Probabilidad Condicional

Sea **S** un espacio muestral finito equiprobable con eventos **A** y **B**, entonces: la probabilidad de que un evento **A** suceda una vez que el evento **B** haya sucedido es:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(A/B) = \text{"Probabilidad de } \mathbf{A} \text{ dado } \mathbf{B} \text{"}$$



$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

En cierto modo  $P(A/B)$  es la  $P(A)$  en relación a **B** (Espacio Muestral Reducido).



**Ejemplo 1:** Se lanzan dos dados, uno rojo y otro negro. Si la suma de sus puntos es 6, hallar la probabilidad de que uno de los dados sea 2.

Lo que se pide es la probabilidad de que uno de los dados sea dos (2), y que la suma de los puntos sea (6).  $A = \{\text{Que uno de los dados sea } 2\}$

$B = \{\text{Que la suma sea } 6\}$

Cardinalidad del espacio muestral:  $n(S) = 36$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\}$$

$B =$  Espacio muestral reducido.

$B = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$   $n(B) = 5$

$(A \cap B) = \{(2,4), (4,2)\}$   $n(A \cap B) = 2$

$$P(A/B) = \frac{2}{5} = 0.40 = 40\%$$

**Ejemplo 2:** De una familia de 2 hijos, ¿cuál es la probabilidad que los dos sean varones?, si:

- a) Se sabe que por lo menos hay un varón.
- b) Se sabe que el primogénito es varón.

Primero calculamos el espacio muestral:  $S = \{(h, h), (h, m), (m, h), (m, m)\}$

Solución:

a) Espacio muestral reducido =  $\{(h, h), (h, m), (m, h)\}$ .

$$P(A/B) = \frac{1}{3} = 0.3333\% = 33.33\%$$

b) Espacio muestral reducido =  $\{(h, h), (h, m)\}$ .

$$P(A/B) = \frac{1}{2} = 0.50 = 50\%$$

**Ejemplo 3:** Se lanzan 2 dados, uno rojo y otro azul, y sabemos que el dado azul muestra un número divisible entre 3, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de puntos de ambos dados sea mayor que 8?

Espacio Muestral Reducido =

$\{(1,3), (1,6), (2,3), (2,6), (4,6), (5,3), (5,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$



$$P(A/B) = \frac{7}{17} = 0.4117 = 41.17\%$$

**Ejemplo 4:**

Se lanzan 2 dados. Hallar la probabilidad de que la suma de sus números sea *mayor o igual a 10*, si aparece un 5 en uno de los dados por lo menos.

Solución:

Espacio Muestral Reducido =  $\{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (6, 5)\}$

$$P(10+) = \frac{3}{11} = 0.27 = 27.27\%$$

**Ejemplo 5:** En cierta ciudad, el 40% de la población tiene cabello castaño, 25% tiene ojos castaños, y **15% tiene ojos y cabello castaños**.

- Si tiene cabello castaño, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga **ojos castaños**?
- Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga **cabello castaño**?

Solución:

$$\text{a) } P(OC/CC) = \frac{P(CC \cap OC)}{P(CC)} = \frac{P(CCyOC)}{P(CC)} = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{40}{100}} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0.375 = 37.50\%$$

$$\text{b) } P(CC/OC) = \frac{P(CC \cap OC)}{P(OC)} = \frac{P(CCyOC)}{P(OC)} = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{25}{100}} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0.6 = 60\%$$



## PRINCIPIOS DE EXPANSIÓN (TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL) (TEOREMA DE BAYES)

### TEOREMA DE BAYES

El teorema de Bayes es una fórmula para determinar las probabilidades condicionales. El teorema se aplica a diferentes eventos donde al menos uno de ellos se sabe que ha ocurrido. El teorema se utiliza cuando el evento puede ocurrir en más de una forma y se busca la probabilidad de que ocurra en una de las formas en particular.

$$P(A_k / A) = \frac{P(A_k)P(A / A_k)}{\sum P(A_i)P(A / A_i)}$$

#### Ejemplos:

- Se están estudiando tres teorías económicas. A partir de la información que se tiene, cada una parece ser un modelo aceptable para una economía dada. Estas teorías predicen la probabilidad de una recesión para el año siguiente, como sigue: la teoría I, 0.6; la II, 0.3; la teoría III, 0.2. Si en realidad ocurre la recesión, ¿cuál es la probabilidad de que la teoría III, sea la elegida?

Solución:

$$P(III / 0.2) = \frac{P(III) \cdot P(0.2 / III)}{P(I) \cdot P(0.6 / I) + P(II) \cdot P(0.3 / II) + P(III) \cdot P(0.2 / III)}$$

Probabilidad de las teorías económicas I, II, III.

$$P(I) = P(II) = P(III) = \frac{1}{3}$$

$$P(III / 0.2) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{10}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{6}{10}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{10}\right)} = \frac{\frac{2}{30}}{\frac{11}{30}} = \frac{2}{11} = 0.18\bar{18} = 18.18\%$$

- Para producir sus artículos una fábrica tiene tres máquinas. En la máquina **A** el 1% de sus artículos son defectuosos, en la **B** el 2%, y en la **C** el 5%; *cada máquina produce la tercera parte de la producción total*. Se elige un artículo al azar, y es defectuoso; determinar la probabilidad de que sea de la máquina:

a) **A**

b) **B**

c) **C**

Además, se elige otro artículo al azar y es no defectuoso, determinar también la probabilidad de que sea de la máquina:

d) **A**

e) **B**

f) **C**



$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(D/A) = \frac{1}{100}$$

$$P(D/B) = \frac{2}{100}$$

$$P(D/C) = \frac{5}{100}$$

Solución:

$$a) P(A/D) = \frac{P(A)P(D/A)}{P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C)} = \frac{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{100} \right)}{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{100} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{2}{100} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{5}{100} \right)} = \frac{\frac{1}{300}}{\frac{8}{300}} = \frac{1}{8} = 0.125 = 12.5\%$$

$$b) P(B/D) = \frac{\frac{1}{3} \left( \frac{2}{100} \right)}{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{100} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{2}{100} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{5}{100} \right)} = \frac{\frac{2}{300}}{\frac{8}{300}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$c) P(C/D) = \frac{\frac{1}{3} \left( \frac{5}{100} \right)}{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{100} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{2}{100} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{5}{100} \right)} = \frac{\frac{5}{300}}{\frac{8}{300}} = \frac{5}{8} = 0.625 = 62.5\%$$

3. Supóngase que, al salir de su hogar, toma una de las bolsas que están sobre la mesa y se dirige a su trabajo. Por la prisa que lleva se le ocurre pensar que pudo haber tomado una bolsa equivocada. La bolsa "A" contenía el desayuno: 2 tortas de jamón; la bolsa "B" contenía el desayuno de su hermano, una torta de jamón y una de queso; y la bolsa "C" la basura. ¿Cuál es la probabilidad de que haya tomado la bolsa correcta, si al abrirla saca una torta de jamón?

Solución:

Probabilidad de tomar las bolsas A, B, o, C.

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

Probabilidad de sacar una torta de jamón de la bolsa A, B, o, C.

$$P(A/J) = \frac{2}{2}$$

$$P(B/J) = \frac{1}{2}$$

$$P(C/J) = \frac{0}{2}$$

Finalmente, la probabilidad de que haya tomado la bolsa correcta y si al abrirla saca una torta de jamón es:

$$P(J/A) = \frac{P(A) \cdot P(A/J)}{P(A) \cdot P(A/J) + P(B) \cdot P(B/J) + P(C) \cdot P(C/J)}$$

$$P(J/A) = \frac{\left( \frac{1}{3} \right) \left( \frac{2}{2} \right)}{\left( \frac{1}{3} \right) \left( \frac{2}{2} \right) + \left( \frac{1}{3} \right) \left( \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{3} \right) \left( \frac{0}{2} \right)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{0}{6}} = \frac{2}{3} = 0.66\overline{6} = 66.67\%$$



4. Tres máquinas **A**, **B** y **C** producen cada una **60%**, **30%**, y **10%** del número total de artículos de una fábrica. Los porcentajes de desperfectos en la producción de estas máquinas son respectivamente **2%**, **3%** y **4%**. Seleccionando un artículo al azar resultó defectuoso. Hallar la probabilidad de que el artículo hubiera sido producido por la máquina **C**.

$$P(A) = \frac{60}{100}$$

$$P(B) = \frac{30}{100}$$

$$P(C) = \frac{10}{100}$$

$$P(D/A) = \frac{2}{100}$$

$$P(D/B) = \frac{3}{100}$$

$$P(D/C) = \frac{4}{100}$$

$$\text{a) } P(A/D) = \frac{P(A)P(D/A)}{P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C)} = \frac{\frac{60}{100} \left( \frac{2}{100} \right)}{\frac{60}{100} \left( \frac{2}{100} \right) + \frac{30}{100} \left( \frac{3}{100} \right) + \frac{10}{100} \left( \frac{4}{100} \right)} = \frac{\frac{120}{10000}}{\frac{120}{10000} + \frac{90}{10000} + \frac{40}{10000}} = \frac{120}{250} = \frac{12}{25} = 0.48 = 48\%$$

$$\text{b) } P(B/D) = \frac{\frac{30}{100} \left( \frac{3}{100} \right)}{\frac{60}{100} \left( \frac{2}{100} \right) + \frac{30}{100} \left( \frac{3}{100} \right) + \frac{10}{100} \left( \frac{4}{100} \right)} = \frac{\frac{90}{10000}}{\frac{120}{10000} + \frac{90}{10000} + \frac{40}{10000}} = \frac{90}{250} = \frac{9}{25} = 0.36 = 36\%$$

$$\text{c) } P(C/D) = \frac{\frac{10}{100} \left( \frac{4}{100} \right)}{\frac{60}{100} \left( \frac{2}{100} \right) + \frac{30}{100} \left( \frac{3}{100} \right) + \frac{10}{100} \left( \frac{4}{100} \right)} = \frac{\frac{40}{10000}}{\frac{120}{10000} + \frac{90}{10000} + \frac{40}{10000}} = \frac{40}{250} = \frac{4}{25} = 0.16 = 16\%$$

5. En cierta facultad, **4%** de los hombres y **1%** de las mujeres tienen más de **6** pies de estatura. Además, **60%** de los estudiantes son mujeres. Ahora bien, si se selecciona al azar un estudiante y es más alto de **6** pies, ¿cuál es la probabilidad que el estudiante sea mujer?

$$P(M) = \frac{60}{100}$$

$$P(H) = \frac{40}{100}$$

$$P(A/M) = \frac{1}{100}$$

$$P(A/H) = \frac{4}{100}$$

$$P(M/A) = \frac{P(M)P(A/M)}{P(M)P(A/M) + P(H)P(A/H)} = \frac{\frac{60}{100} \left( \frac{1}{100} \right)}{\frac{60}{100} \left( \frac{1}{100} \right) + \frac{40}{100} \left( \frac{4}{100} \right)} = \frac{\frac{60}{10000}}{\frac{60}{10000} + \frac{160}{10000}} = \frac{60}{220} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11} = 0.27 = 27.27\%$$

6. En **3** urnas se colocan canicas rojas, blancas y azules, distribuidas de la siguiente manera:

**Urna 1 = 5R, 3B, 2A**

**Urna 2 = 1R, 8B, 1A**

**Urna 3 = 3R, 1B, 6A**

Se selecciona una urna al azar y se saca una canica, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la número 3, si la canica es roja?



$$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(R/U_1) = \frac{5}{10}$$

$$P(R/U_2) = \frac{1}{10}$$

$$P(R/U_3) = \frac{3}{10}$$

$$P(U_3/R) = \frac{P(U_3)P(R/U_3)}{P(U_1)P(R/U_1) + P(U_2)P(R/U_2) + P(U_3)P(R/U_3)} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}\right)}{\frac{1}{3}\left(\frac{5}{10}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}\right)} =$$

$$\frac{\frac{3}{30}}{\frac{5}{30} + \frac{1}{30} + \frac{3}{30}} = \frac{1}{10} = 0.1 = 10\%$$

7. Se sabe que una urna amarilla 3 urnas se colocan canicas rojas,  
blancas y azules, distribuidas de la siguiente manera:

**Urnas 1 = 5R, 3B, 2A**

**Urnas 2 = 1R, 8B, 1A**

**Urnas 3 = 3R, 1B, 6A**

Se selecciona una urna al azar y se saca una canica, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la número 3, si la canica es roja?

$$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(R/U_1) = \frac{5}{10}$$

$$P(R/U_2) = \frac{1}{10}$$

$$P(R/U_3) = \frac{3}{10}$$

$$P(U_3/R) = \frac{P(U_3)P(R/U_3)}{P(U_1)P(R/U_1) + P(U_2)P(R/U_2) + P(U_3)P(R/U_3)} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}\right)}{\frac{1}{3}\left(\frac{5}{10}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}\right)} =$$

$$\frac{\frac{3}{30}}{\frac{5}{30} + \frac{1}{30} + \frac{3}{30}} = \frac{1}{10} = 0.1 = 10\%$$



Unidad V: Variable aleatoria, función de probabilidad y función de probabilidad acumulada, esperanza matemática, varianza, desviación estándar, distribuciones teóricas de probabilidad; binomial y normal.

## VARIABLES ALEATORIAS

### CONCEPTO DE FUNCIÓN

Una función es una regla del (dominio) que hace corresponder a cada elemento de un primer conjunto, un único elemento de un segundo conjunto (contra dominio).

A los elementos del primer conjunto se les conoce como **dominio** de la función; y se escribe:

$$Df = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad A = Df \quad f(x) = 2x$$

A los elementos del segundo conjunto se les conoce como **contra dominio** de la función:

$$\text{contra}Df = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\} \quad B = \text{contra}Df$$

A los elementos del contra dominio que cumplen con la función se les conoce como **rango o imagen** de la función:

$$Rf = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

### VARIABLE ALEATORIA

Una variable aleatoria es una función que asigna a cada uno de los elementos del espacio muestral un número real.

**S**= espacio muestral

**V**= variable aleatoria

**s**= dominio de la variable aleatoria

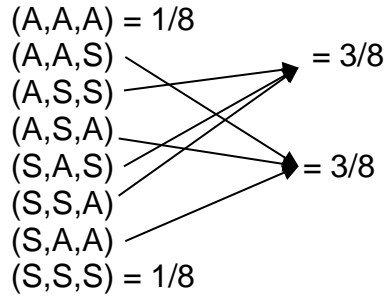
**X**= rango de la variable aleatoria

Ejemplo: Se lanza *una moneda* 3 veces y el evento es el **número de águilas que aparecen**:



**ESPACIO MUESTRAL**

= {(A,A,A), (A,A,S), (A,S,S), (A,S,A), (S,A,S), (S,S,A), (S,A,A), (S,S,S)}:



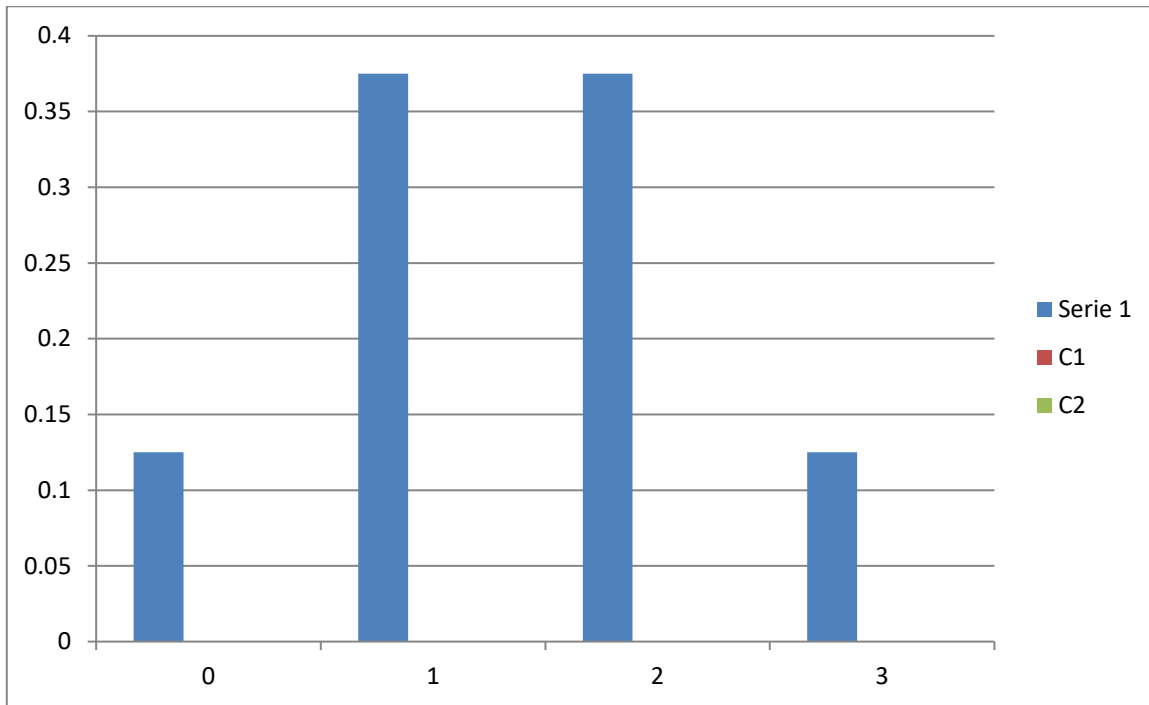
**DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD (FUNCIÓN DE PROBABILIDAD)**

Es aquella cuyo dominio es el rango de la variable aleatoria. Se representa por  $y = f(x)$ , donde "x" representa los valores que toma la variable aleatoria. El rango de esta función es la probabilidad de cada valor que toma la variable aleatoria.

En general una función de probabilidad consiste en asignar a cada valor de una variable aleatoria su correspondiente probabilidad.

La función de probabilidad puede expresarse de diferentes formas, como se muestra a continuación:

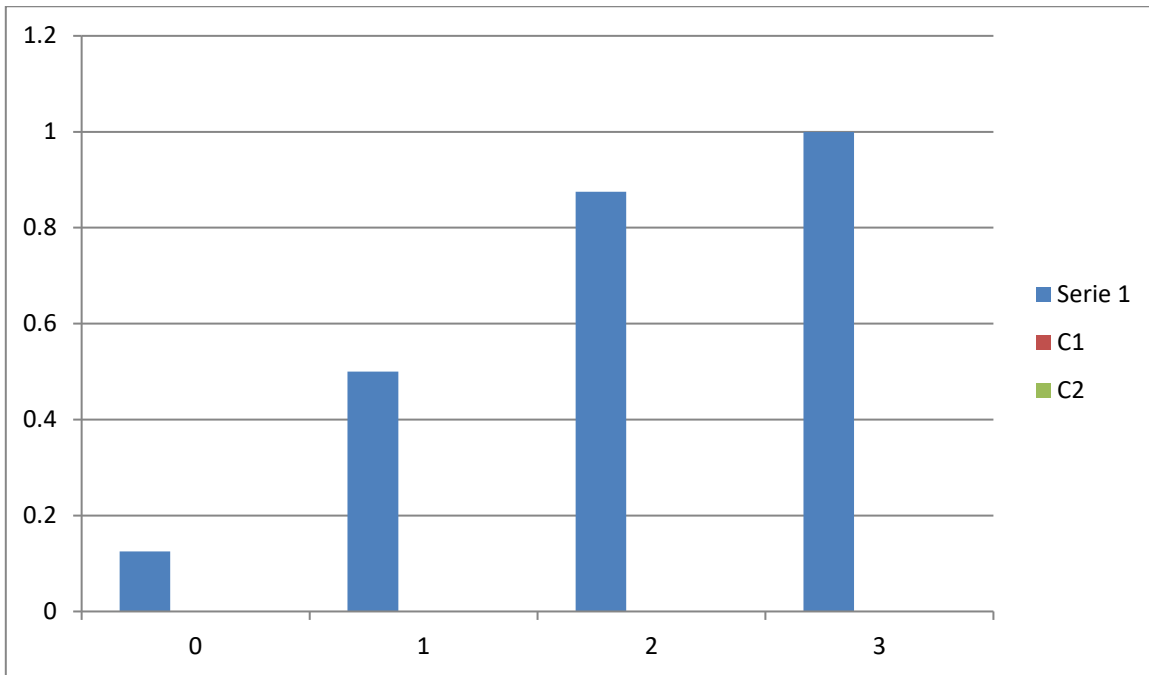
<b>x</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>f(x)</b>	<b>1/8</b>	<b>3/8</b>	<b>3/8</b>	<b>1/8</b>



### DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD ACUMULADA

Al igual que en estadística (frecuencia acumulada) la probabilidad acumulada es la suma de las probabilidades anteriores:

x	0	1	2	3
f(x)	1/8	4/8	7/8	8/8



### VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Una variable aleatoria es discreta si los valores que toma pueden contarse. En una variable aleatoria discreta, los valores de  $f(x)$  deben cumplir con las siguientes condiciones:

- a) 1 menor o igual que  $f(x)$  mayor o igual que 0       $1 \geq f(x) \geq 0$      $0 \leq f(x) \leq 1$   
b)  $\sum f(x) = 1$

### VALOR ESPERADO O ESPERANZA MATEMÁTICA

El valor esperado de la variable aleatoria discreta " $x$ " o bien esperanza matemática de la variable aleatoria " $x$ ", se representa por  $E(x)$  que es igual a la suma de todos los valores posibles de  $x$  multiplicados por sus respectivas probabilidades.

$$E(x) = \mu = \sum (x \cdot f(x))$$

Considerando la distribución de probabilidad del primer ejemplo de variable aleatoria, que fue el número de águilas que aparecen:

<b>X</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>f(x)</b>	<b>1/8</b>	<b>3/8</b>	<b>3/8</b>	<b>1/8</b>



La esperanza matemática de la variable aleatoria (número de águilas), es:

$$E(x) = 0\left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) = 0 + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1.5$$

#### VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

La varianza puede interpretarse como *el área promedio de la dispersión de los datos*.

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = \Sigma(x^2 \cdot f(x)) - [\Sigma(x \cdot f(x))]^2$$

De nuestro ejemplo:

$$\text{Var}(x) = 0^2\left(\frac{1}{8}\right) + 1^2\left(\frac{3}{8}\right) + 2^2\left(\frac{3}{8}\right) + 3^2\left(\frac{1}{8}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0 + \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} - \frac{9}{4} = \frac{24}{8} - \frac{9}{4} = \frac{12}{4} - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

#### DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

La desviación estándar puede interpretarse como *la distancia promedio de la dispersión de los datos*.

$$\sqrt{\text{Var}(x)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$$

#### I. Ejemplos:

1. Se lanza un par de dados corrientes y **se observa el mayor de sus números**. Primero obtenemos el espacio finito equiprobable **S** que en este caso será de **36** parejas ordenadas entre el **1** y el **6**:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\}$$

Sea **X** que hace corresponder a cada punto **(a, b)** de **S** el mayor de sus números, o sea. **X(a,b)=max(a, b)**. Entonces **X** es una variable aleatoria cuyo conjunto imagen es:

$$X(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ahora calculamos la distribución de **f** de **X**:

$$f(1) = P(X=1) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$$



$$f(2) = P(X = 2) = P(\{(1,2)(2,2)(2,1)\}) = \frac{3}{36}$$

$$f(3) = P(X = 3) = P(\{(1,3)(2,3)(3,3)(3,2)(3,1)\}) = \frac{5}{36}$$

$$f(4) = P(X = 4) = P(\{(1,4)(2,4)(3,4)(4,4)(4,3)(4,2)(4,1)\}) = \frac{7}{36}$$

$$f(5) = P(X = 5) = P(\{(1,5)(2,5)(3,5)(4,5)(5,5)(5,4)(5,3)(5,2)(5,1)\}) = \frac{9}{36}$$

$$f(6) = P(X = 6) = P(\{(1,6)(2,6)(3,6)(4,6)(5,6)(6,6)(6,5)(6,4)(6,3)(6,2)(6,1)\}) = \frac{11}{36}$$

De acuerdo con los datos obtenidos, calcularemos la tabla de la distribución de probabilidad con su gráfica, y la tabla de la distribución de probabilidad acumulada y también con su gráfica, además de la esperanza matemática, la varianza y la desviación estándar.

Tabla de la distribución de probabilidad:

<b>X</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>f(X)</b>	<b>1/36</b>	<b>3/36</b>	<b>5/36</b>	<b>7/36</b>	<b>9/36</b>	<b>11/36</b>

La **esperanza matemática** de la variable aleatoria es:

$$E(x) = 1\left(\frac{1}{36}\right) + 2\left(\frac{3}{36}\right) + 3\left(\frac{5}{36}\right) + 4\left(\frac{7}{36}\right) + 5\left(\frac{9}{36}\right) + 6\left(\frac{11}{36}\right) = \frac{1}{36} + \frac{6}{36} + \frac{15}{36} + \frac{28}{36} + \frac{45}{36} + \frac{66}{36} = \frac{161}{36} = 4.47$$

**VARIANZA**

$$Var(x) = \sigma^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = \Sigma(x^2 \cdot f(x)) - [\Sigma(x \cdot f(x))]^2$$

$$Var(x) = 1^2\left(\frac{1}{36}\right) + 2^2\left(\frac{3}{36}\right) + 3^2\left(\frac{5}{36}\right) + 4^2\left(\frac{7}{36}\right) + 5^2\left(\frac{9}{36}\right) + 6^2\left(\frac{11}{36}\right) - \left(\frac{161}{36}\right)^2$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{12}{36} + \frac{45}{36} + \frac{112}{36} + \frac{225}{36} + \frac{396}{36} - \frac{25,921}{1,296} = \frac{791}{36} - \frac{25,921}{1,296} = \frac{28,476}{1,296} - \frac{25,921}{1,296} = \frac{2,555}{1,296} = 1.97$$

**DESVIACIÓN ESTÁNDAR**

$$\sqrt{Var(x)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma = \sqrt{1.97} = 1.40$$



**II. Ejercicios para resolver:**

2. Se lanza un par de dados corrientes. Primero obtenemos el espacio finito equiprobable **S** que en este caso será de **36** parejas ordenadas entre el **1** y el **6**:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\}$$

Ahora sea **Y** que hace corresponder a cada punto **(a, b)** de **S** la suma de sus números, o sea, **Y(a,b) = a + b**. Entonces **Y** es también una variable aleatoria de **S** con conjunto imagen:

$$Y(S) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

A continuación, la distribución de **g** de **Y**:

Tabla de la distribución de probabilidad:

<b>y<sub>i</sub></b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
<b>G(y<sub>i</sub>)</b>	<b>1/36</b>	<b>2/36</b>	<b>3/36</b>	<b>4/36</b>	<b>5/36</b>	<b>6/36</b>	<b>5/36</b>	<b>4/36</b>	<b>3/36</b>	<b>2/36</b>	<b>1/36</b>

Obtendremos, **g(4) = 3/36** del hecho de que, (1,3), (2,2) y (3,1) sean aquellos puntos de **S** para los que la suma de componentes es **4**; por lo tanto:

$$g(2) = P(Y = 2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$$

$$g(3) = P(Y = 3) = P(\{(1,2)(2,1)\}) = \frac{2}{36}$$

$$g(4) = P(Y = 4) = P(\{(1,3)(2,2)(3,1)\}) = \frac{3}{36}$$

$$g(5) = P(Y = 5) = P(\{(1,4)(2,3)(3,2)(4,1)\}) = \frac{4}{36}$$

$$g(6) = P(Y = 6) = P(\{(1,5)(2,4)(3,3)(4,2)(5,1)\}) = \frac{5}{36}$$

$$g(7) = P(Y = 7) = P(\{(1,6)(2,5)(3,4)(4,3)(5,2)(6,1)\}) = \frac{6}{36}$$

$$g(8) = P(Y = 8) = P(\{(2,6)(3,5)(4,4)(5,3)(6,2)\}) = \frac{5}{36}$$

$$g(9) = P(Y = 9) = P(\{(3,6)(4,5)(5,4)(6,3)\}) = \frac{4}{36}$$

$$g(10) = P(Y = 10) = P(\{(4,6)(5,5)(6,4)\}) = \frac{3}{36}$$



$$g(11) = P(Y = 11) = P(\{(5,6)(6,5)\}) = \frac{2}{36}$$

$$g(12) = P(Y = 12) = P(\{(6,6)\}) = \frac{1}{36}$$

La **esperanza matemática** o la media de **Y** es:

$$E(Y) = 2\left(\frac{1}{36}\right) + 3\left(\frac{2}{36}\right) + 4\left(\frac{3}{36}\right) + 5\left(\frac{4}{36}\right) + 6\left(\frac{5}{36}\right) + 7\left(\frac{6}{36}\right) + 8\left(\frac{5}{36}\right) + 9\left(\frac{4}{36}\right) + 10\left(\frac{3}{36}\right) + 11\left(\frac{2}{36}\right) + 12\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{2}{36} + \frac{6}{36} + \frac{12}{36} + \frac{20}{36} + \frac{30}{36} + \frac{42}{36} + \frac{40}{36} + \frac{36}{36} + \frac{30}{36} + \frac{22}{36} + \frac{12}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

De acuerdo con los datos obtenidos, calcularemos la gráfica de la distribución de probabilidad, y la tabla de la distribución de probabilidad acumulada y también su gráfica, además de la esperanza matemática, la varianza y la desviación estándar.

#### VARIANZA

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= 2^2\left(\frac{1}{36}\right) + 3^2\left(\frac{2}{36}\right) + 4^2\left(\frac{3}{36}\right) + 5^2\left(\frac{4}{36}\right) + 6^2\left(\frac{5}{36}\right) + 7^2\left(\frac{6}{36}\right) + 8^2\left(\frac{5}{36}\right) + 9^2\left(\frac{4}{36}\right) + 10^2\left(\frac{3}{36}\right) + \\ & 11^2\left(\frac{2}{36}\right) + 12^2\left(\frac{1}{36}\right) - \left(\frac{252}{36}\right)^2 = \frac{4}{36} + \frac{18}{36} + \frac{48}{36} + \frac{100}{36} + \frac{180}{36} + \frac{294}{36} + \frac{320}{36} + \frac{324}{36} + \frac{300}{36} + \frac{242}{36} + \frac{144}{36} - \frac{63,504}{1,296} = \\ & \frac{1,974}{36} - \frac{63,504}{1,296} = \frac{71,064}{1,296} - \frac{63,504}{1,296} = \frac{7,560}{1,296} = 5.8\bar{3} \end{aligned}$$

#### DESVIACIÓN ESTÁNDAR

$$\sqrt{\text{Var}(x)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma = \sqrt{5.8\bar{3}} = 2.41$$

#### III. Ejercicios para resolver:

Problemas para resolver de probabilidades, combinaciones, permutaciones y algo más:

#### De permutaciones:

1. Un supermercado lleva a cabo un sistema de inventario permanente asignando un código a cada uno de los artículos que ofrece.

Existen las siguientes disposiciones comerciales:

- I. Se prohíbe que en cada clave se repitan dígitos.
- II. En el departamento de abarrotes se utilizan claves que comienzan con el número **2** y finalizan con el **4**.
- III. En el departamento de papelería se utilizan claves que no contengan ni el **5** ni el **0**.



**IV.** En cosméticos se utilizan únicamente números divisibles por **5**.

**V.** Todas las claves deben formarse con **5** dígitos.

Se pregunta:

- a) ¿Cuántas claves distintas se pueden obtener?
- b) ¿Cuántas claves distintas se pueden obtener para abarrotes?
- c) ¿Cuántas claves distintas se pueden obtener para papelería?
- d) ¿Cuántas claves distintas se pueden obtener para cosméticos?

Respuestas:

a) ¿Cuántas claves distintas se pueden obtener?  $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

$$P_5^{10} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 30,240 \text{ claves diferentes}$$

b) ¿Cuántas claves distintas se pueden obtener para abarrotes?

$$P_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 336 \text{ claves diferentes}$$

c) ¿Cuántas claves distintas se pueden obtener para papelería?

$$P_5^8 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 6,720 \text{ claves diferentes}$$

d) ¿Cuántas claves distintas se pueden obtener para cosméticos?

$$P_4^9 + P_4^9 = 2(P_4^9) = 2\left(\frac{9!}{(9-4)!}\right) = 2\left(\frac{9!}{5!}\right) = 2\left(\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!}\right) = 2(9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6)$$

$$= 6,048 \text{ claves diferentes}$$

De combinaciones:  $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

2. ¿Cuántos comités diferentes de **3** personas se pueden formar con un grupo de **7**?

$$C_3^7 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3!4!} = 35 \text{ formas diferentes}$$

3. ¿De cuántas maneras puede constituirse un comité que contenga: **2** profesores y **3** estudiantes, si hay **6** de los primeros y **10** de los segundos.

$$C_2^6 \cdot C_3^{10} = \frac{6!}{2!(6-2)!} \cdot \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2!4!} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3!7!} = \frac{30}{2} \cdot \frac{720}{6} = 15(120) = 1,800 \text{ formas diferentes}$$

$$(6C2)(10C3) = 15(120) = 1,800 \text{ formas diferentes}$$



4. ¿Cuántos comités diferentes de **5** personas se pueden formar con un grupo de **8**?
5. ¿Cuántos comités diferentes de **6** personas se pueden formar con un grupo de **12**?
6. ¿Cuántos comités diferentes de **4** personas se pueden formar con un grupo de **9**?
7. ¿De cuántas maneras puede constituirse un comité que contenga:  
**3** profesores y **5** estudiantes, si hay **8** de los primeros y **12** de los segundos.
8. ¿De cuántas maneras puede constituirse un comité que contenga:  
**3** profesores y **4** estudiantes, si hay **6** de los primeros y **9** de los segundos.

*Respuestas:*

4.

$$C_5^8 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!3!} = 56 \text{ formas diferentes}$$

5.

$$C_6^{12} = \frac{12!}{6!(12-6)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!6!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6!} =$$
$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7}{1} = 924 \text{ formas diferentes}$$

$$(12C_6) = 924 \text{ formas diferentes}$$

6. ¿Cuántos comités diferentes de **4** personas se pueden formar con un grupo de **9**?

$$C_4^9 = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{4!5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 6}{1} = 126 \text{ formas diferentes}$$

$$(9C_4) = 126 \text{ formas diferentes}$$

7. ¿De cuántas maneras puede constituirse un comité que contenga:  
**3** profesores y **5** estudiantes, si hay **8** de los primeros y **12** de los segundos.



$$C_2^6 \cdot C_3^{10} = \frac{6!}{2!(6-2)!} \cdot \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2!4!} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3!7!} = \frac{30}{2} \cdot \frac{720}{6} = 15(120) = 1,800 \text{ formas diferentes}$$

$$(6C2)(10C3) = 15(120) = 1,800 \text{ formas diferentes}$$

8. ¿De cuántas maneras puede constituirse un comité que contenga:  
**3** profesores y **4** estudiantes, si hay **6** de los primeros y **9** de los segundos.

$$C_3^6 \cdot C_4^9 = \frac{6!}{3!(6-3)!} \cdot \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!3!} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{4!5!} = 20 \cdot \frac{3,024}{24} = 20(126) = 2,520 \text{ formas diferentes}$$

$$(6C3)(9C4) = 20(126) = 2,520 \text{ formas diferentes}$$

### De probabilidad:

9. A un jugador se le reparten **5** cartas, una tras otra de una baraja de **52** cartas,  
¿Cuál es la probabilidad de que todas sean corazones rojos?

$$P(A) = \frac{13}{52} \text{ corazones rojos}$$

$$P(5 \text{ una tras otra}) = \left(\frac{13}{52}\right)\left(\frac{12}{51}\right)\left(\frac{11}{50}\right)\left(\frac{10}{49}\right)\left(\frac{9}{48}\right) = \frac{154,440}{311'875,200} = 0.000495198 = 0.0495\% \text{ de que sean corazones rojos}$$

10. Se lanzan dos dados. Hallar la probabilidad de que la suma de sus números  
sea mayor o igual a **10**, si aparece un **5** en uno de los dados por lo menos.

- a) Aparece un **5** en el primer dado.

$$\text{Espacio Muestral Reducido} = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$$

$$P(5, 10+) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.\overline{33} = 33.33\%$$

- b) Que la suma de sus números sea mayor o igual a **10**.

$$\text{Espacio Muestral Reducido} = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (6, 5)\}$$

$$P(10+) = \frac{3}{11} = 0.\overline{27} = 27.27\%$$

11. Se tienen **2** cajas, la caja **A** contiene **3** fichas blancas y **5** rojas. La caja **B**  
contiene **7** blancas y **2** rojas. Hallar la probabilidad de que al extraer una ficha  
de la caja **A** y una de la caja **B** ambas sean rojas.



$$P(R_A \cap R_B) = P(R_A) \cdot P(R_B) = \left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{5}{36} = 0.138\bar{8} = 13.88\%$$

12. Un lote de **12** artículos tiene **4** defectuosos. Se toman al azar **3** artículos del lote, uno tras otro. Hallar la probabilidad de los **3** sean sin defecto.

a) Sin reemplazo.

$$P(3/SD) = \left(\frac{8}{12}\right)\left(\frac{7}{11}\right)\left(\frac{6}{10}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{3}{5} = \frac{14}{55} = 0.254\bar{5} = 25.45\%$$

b) Con reemplazo.

$$P(3/SD) = \left(\frac{8}{12}\right)\left(\frac{8}{12}\right)\left(\frac{8}{12}\right) = \left(\frac{8}{12}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} = 0.29\bar{6} = 29.62\%$$

13. Una bolsa contiene **10** transistores, **3** de los cuales están defectuosos. Si se extraen **2** transistores al azar, uno tras otro:

a) Hallar la probabilidad de que ninguno de los dos sea con defecto, si se extraen sin reemplazo.

$$P(2/SD) = \left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{6}{9}\right) = \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{15} = 0.4\bar{6} = 46.66\%$$

b) Si se extraen **3** sin reemplazo, encontrar la probabilidad de que ninguno de los **3** esté defectuoso.

$$P(3/SD) = \left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{6}{9}\right)\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{7}{3 \cdot 8} = \frac{7}{24} = 0.291\bar{6} = 29.16\%$$

c) Si se extraen **3** sin reemplazo, encontrar la probabilidad de que los **2** primeros sean sin defecto y el tercero si sea defectuoso.

$$P(3/SD) = \left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{6}{9}\right)\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{7}{40} = 0.175 = 17.50\%$$

14. Pronósticos Deportivos.

Determinar la probabilidad de obtener un primer lugar si la boleta se llena al azar:

a) Hallar la probabilidad de que ninguno de los dos sea con defecto, si se extraen sin reemplazo.



$$P(\text{1er lugar}) = \left. \begin{array}{l} 1\text{er partido: local empate visita } (1/3) \\ 2\text{o partido: local empate visita } (1/3) \\ 3\text{o partido: local empate visita } (1/3) \\ 4\text{o partido: local empate visita } (1/3) \\ 5\text{o partido: local empate visita } (1/3) \\ 6\text{o partido: local empate visita } (1/3) \\ 7\text{o partido: local empate visita } (1/3) \\ 8\text{o partido: local empate visita } (1/3) \\ 9\text{o partido: local empate visita } (1/3) \\ 10\text{o partido: local empate visita } (1/3) \\ 11\text{o partido: local empate visita } (1/3) \\ 12\text{o partido: local empate visita } (1/3) \\ 13\text{o partido: local empate visita } (1/3) \end{array} \right\}$$

$$P(\text{1er lugar}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{13} = \frac{1}{1'594,323} = 0.000000627 = 0.0000627\%$$

## DISTRIBUCIONES TEÓRICAS DE PROBABILIDAD

Algunos experimentos aleatorios tienen una estructura muy similar lo que da lugar a las llamadas distribuciones teóricas de la probabilidad. Algunas de ellas son de polisión, uniforme, normal, exponencial entre otras.

Las que estudiaremos serán binomial y la normal.

### DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Se aplica para pruebas repetidas e independientes de un experimento con dos posibles resultados: favorable (éxito) y desfavorable (fracaso). Designando a "p" la probabilidad y a "q" la probabilidad del resultado desfavorable. Su interés es el número de éxitos y no el orden en que suceden.

#### **Ejemplo:**

Un examen contiene 5 preguntas de falso y verdadero. Si se contesta al azar, determinar la probabilidad de contestar 3 preguntas correctamente.

a) F    V    (1/2)



- b) F    V    (1/2)
- c) F    V    (1/2)
- d) F    V    (1/2)
- e) F    V    (1/2)

$$p(a \cap b \cap c \cap d \cap e) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$$

$$p(3 \text{ correctas}) = N\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = C_3^5\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16} = 0.3128 = 31.28\%$$

En general si "n" es el total de "pruebas", "k" es el número de éxitos esperados, "p" la probabilidad de éxito, y "q" la probabilidad de fracaso, entonces se define:

Probabilidad  $p(k; n, p) = C_k^n p^k q^{n-k}$

Esperanza Matemática  $E(x) = np = 5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} = 2.5$

Varianza  $V(x) = npq = 5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} = 1.25$

Desviación Estándar  $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1.11$

### DISTRIBUCIÓN NORMAL

La mayoría de las distribuciones estadísticas se comparan y relacionan con la distribución normal. La curva normal de Gauss se define como:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}$$

Además:  $E(x) = \mu$   
 $Var(x) = \sigma^2$   
 $\sigma = \sqrt{Var(x)}$



se hace que:

$$t = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Para los ejercicios prácticos es necesario convertir los valores de "x" a sus equivalentes en la curva normal estándar.

$$x^* = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

**Ejemplo:**

En un grupo la media aritmética es 7.5, la desviación estándar es 0.8. Calcula el valor estándar que le corresponde a:

- a) 8      b) 6

a)  $x^* = \frac{8 - 7.5}{0.8} = 0.625$

b)  $x^* = \frac{6 - 7.5}{0.8} = -0.875$

En un examen la media aritmética es 74 y la desviación estándar es 12. Hallar las puntuaciones que corresponden a las siguientes *puntuaciones estándar*:

a) -1,                      entonces:  $-1 = \frac{x - 74}{12} \therefore x = 62$

b) -1.5,                    entonces:  $-1.5 = \frac{x - 74}{12} \therefore x =$

c) 0,                        entonces:  $0 = \frac{x - 74}{12} \therefore x =$

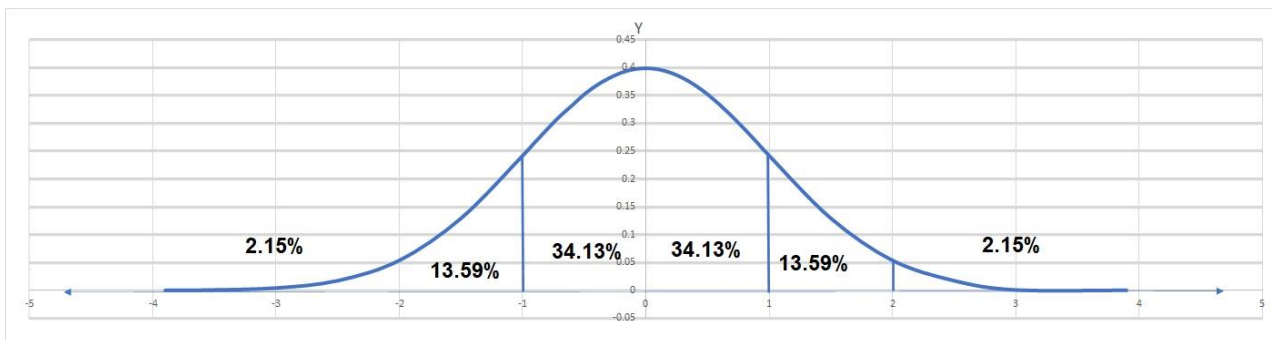
d) -2,                      entonces:  $-2 = \frac{x - 74}{12} \therefore x =$

e) -2.5,                    entonces:  $-2.5 = \frac{x - 74}{12} \therefore x =$



### PROPIEDADES DE LA CURVA NORMAL

1. Es simétrica y tiene forma de campana.
  2. La media aritmética está a la mitad y divide el área en dos partes iguales.
  3. Teóricamente la curva se extiende en ambas direcciones y tiende gradualmente a unirse con la recta horizontal (ejes) hasta el infinito sin tocarla y es asíntota.
- La curva normal se acepta como modelo ideal de una situación real. Su uso y el de la tabla de áreas normales *PERMITEN OBTENER LA PROBABILIDAD DE UN SUCESO*.





**Ejemplo:** La empresa "**Grear Tire Company**" acaba de desarrollar un neumático radial con banda de acero que venderá a través de una cadena nacional de tiendas de descuento. Como ese neumático es un producto nuevo la dirección cree que la garantía, de millas recorridas que se ofrece con el mismo es un factor importante en la aceptación. Antes de formalizar esa política, la dirección desea contar con información de acerca de las millas que duran los neumáticos.

En pruebas reales en carretera, el grupo de ingeniería ha estimado que el promedio de distancia recorrida es de 36,500 millas y que la desviación estándar es de 5,000 millas. Además, los datos reunidos indican que la adopción de la distribución normal es una hipótesis razonable, por lo que nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Qué porcentaje de neumáticos se puede esperar que duren más de 40,000 millas?

Esta duda se puede resolver determinando el área de la región de la curva normal. En otras palabras, ¿cuál es la posibilidad de que las millas rebasen las 40,000? Cuando  $x=40,000$  se tiene:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{40,000 - 36,500}{5,000} = 0.7$$

$z=0.7$  le corresponde un área de 0.2580

$z=3.9$  le corresponde un área de 0.5000  
y  $0.5000 - 0.2580 = 0.2420$

$$P(x \geq 40,000) = 24.20\%$$

Ahora supongamos que "**Grear**" planea una garantía según la cual el usuario recibirá un descuento en sus neumáticos de repuesto, si los neumáticos originales no rebasan la distancia en millas especificada en la garantía; y de esta manera se plantea: ¿cuáles deben ser las millas recorridas para que no haya de más del 10% de neumáticos que aprovechen la garantía?

Esta pregunta la resolveremos de la siguiente manera:

De la tabla de áreas de la curva normal se toma el valor que corresponde al 10%  
Para 10%

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = -1.28$$

$$x - \mu = -1.28\sigma$$

$$x - \mu = -1.28\sigma$$

$$x = \mu - 1.28\sigma$$

Nos queda

$$x = 36,500 - 1.28(5,000) = 30,100 \text{ millas}$$

Por lo tanto, la distancia en millas especificada en la garantía debe ser de 30,000



millas.

#### **BIBLIOGRAFIA.**

- 1) Hernández V. Apuntes de Probabilidad y estadística, DEMS, IPN, México 2015.
- 2) Probabilidad y Estadística Serie Schaums